

# Elliptikus függvények

Egyes műszaki problémákkal kapcsolatban gyakran merülnek fel olyan matematikai problémák, amelyek megértése, ill. alkalmazása nagy nehézségeket okoz az átlagos matematikai képzettséggel rendelkezők számára. A matematikai könyvekben való utánjárás pedig rendszerint nagyobb munkával jár, és gyakran újabb és újabb előismeretek megszerzését teszi szükségessé.

Bár lapunknak nem célja, hogy matematikai cikkeket közöljön, mégis úgy gondoljuk, hogy célszerű, ha a híradástechnikával foglalkozók megismerik az olyan alapvető periodikus függvényeket, mint az elliptikus függvények, amelyeknek egy határesetét képezik az ismert körfüggvények.

A tankönyvek rendszerint vagy a komplex függvénytan keretében a Theta függvényekből, vagy valamilyen integrálformulából, vagy pedig egy fizikai probléma — mint például az ingamozgás —

megoldásából vezetik le az elliptikus függvényeket.

Ezzel szemben cikkünk célja, hogy teljesen érthetően és világosan, geometriai definíció alapján mutassa be az elliptikus függvények származtatását, minden esetben külön hangsúlyozva a periodikus tulajdonságokat és az analógiát a körfüggvényekkel.

A rövid terjedelem ellenére teljességre törekszünk. Csak az alapvető összefüggéseket tárgyaljuk részletesen, a további összefüggéseket csak végeredményeinkben foglaljuk össze. Ahol csak lehet, hivatkozunk a hozzáférhető szakirodalomban megtalálható levezetésre, diagramra, táblázatra.

Cikkünk megértéséhez csupán a matematikai alapfogalmak és az integrálszámítás elemeinek az ismerete szükséges. Azokat az integrálformulákat, amelyek cikkünkben előfordulnak, röviden összefoglaljuk:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{ar sh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc tg} x,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{ar ch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{ar th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \begin{cases} = \operatorname{arc sin} x \\ - \operatorname{arc cos} x \end{cases}, \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

## 1. A periodikus függvények geometriai ábrázolása

### 1.1 Függvénykapcsolatok

Általánosan egyváltozós függvényről beszélünk, ha két mennyiség — például  $x$  és  $y$  vagy  $r$  és  $\varphi$  stb. — között valamilyen meghatározott kapcsolat áll fenn. Ha például az  $y=x^2$  paraboláról beszélünk, rendszerint mindjárt a Descartes-koordináta-rendszerben ábrázolt parabolára gondolunk. Nem szabad azonban megfeledeznünk arról, hogy az  $y=x^2$  függvénykapcsolat elsősorban egy táblázat, amelyben  $x$  és  $y$  mint egyenrangú változók vannak egymáshoz rendelve.

$x$	0	1	2	3	...
$y$	0	1	4	9	...

Pusztán felfogás kérdése, melyiket nevezük függő és melyiket független változónak, vagyis melyik függvény az elsődleges, az  $y=x^2$  vagy az  $x=\sqrt{y}$  függvény. A lényeges mindig az egymáshoz rendelés.

Egy másik szempont, amire fel akarjuk hívni a figyelmet, a függvény értelmezése. Amíg a függvénykapcsolatot egy matematikai formulával vagy

táblázattal egyértelműen megadhatjuk, addig ugyan ezt a kapcsolatot igen sokféleképpen értelmezhetjük. Például az  $y=x^2$  parabola lehet geometria

definíció, az  $y=\left(\frac{x^3}{3}\right)$  differenciálás vagy az  $y=2 \int_0^x x dx$  integrálás eredménye.

Általában a függvényt célszerű úgy értelmezni, hogy számunkra fontos tulajdonságai a legegyszerűbbek és legkönnyebben kifejezhetők legyenek.

Külön kiemeljük az integrálmeghatározás fontosságát. Ha a határozott integrál egyik határa maga az egyik változó, akkor  $(y, x)$  egyértelműen megadott, egy görbével leírható függvénykapcsolat. Például a parabola fenti integrállal való megadása  $y$ -t úgy értelmezi, mint az  $y=2x$  egyenes alatti területet és 0 és  $x$  értékek között.

A következőkben az integrálás felső határát és a változót azonos betűvel fogjuk jelölni, hogy ne szaporítsuk feleslegesen a jelölések számát.

### 1.2 Periodikus függvények

Periodikusnak nevezünk egy függvényt, ha  $f(z+c)=f(z)$  minden  $z$ -re. Ebből következik, hogy  $f(z+nc)=f(z)$ . Itt  $c$  a periódus komplex szám,

n pedig tetszőleges egész szám. Periodikus függvények periodikusak lehetnek a valós  $x$  tengely mentén, mint például a  $\sin x$ ,  $\cos x$ , vagy a képzetes tengely mentén, mint  $e^z$ ,  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$ , vagy pedig mindkét tengely mentén, mint az elliptikus függvények. Ezért az elliptikus függvényeket kétszeres periodicitású függvényeknek nevezzük. Cikkünkben csak a valós tengely menti periodicitással foglalkozunk.

### 1.3 A periodikus függvények származtatása

A valós egyváltozós periodikus függvényeket geometriailag legszemléletesebben a kördiagramokkal ábrázolhatjuk. A következőkben a kördiagramokat az  $x-y$  síkban ábrázoljuk, és  $(x, y)$ , illetve  $(r, \varphi)$  koordináták egymáshoz rendelésével definiáljuk, az 1a ábrának megfelelően. A  $C_1$  zárt görbe minden szempontból jellemzi egy periodikus függvény egyetlen periódusát. A görbét többször körüljárva kapjuk az újabb periódusokat.

A kérdés csupán az, hogy  $C_1$  görbe melyik jellemzőjét akarjuk vizsgálni és minek a függvényében. Ha az  $x$  kezdőtengelyt kijelöltük, független változónak önként kínálkozik a  $\varphi$  szög.  $C_1$  görbe bármelyik jellemzőjét vizsgáljuk  $\varphi$  függvényében, például az 1a ábrán a  $g, b, r$  távolságokat, ezek egymáshoz való viszonyát mint  $\frac{g}{r}, \frac{b}{r}$  vagy bármely függvényét mint  $g^2, \log r$  stb., eredőképpen  $2\pi$  periódust kapunk.

További periodikus függvényeket származtathatunk a  $C_1$  görbéből, ha figyelembe vesszük, hogy a  $\varphi$ -t meglehetősen önkényesen választottuk az egyik változónak. Ugyanilyen joggal vehettük volna a  $\varphi$  szög helyett az

$$\left. \begin{aligned} \widehat{AB} &= \int_A^B ds \text{ ívhosszat,} \\ \widehat{AB}^\circ &= \int_A^B r d\varphi \text{ körösített ívhosszat} \\ 2 \cdot OAB\Delta &= \int_A^B r^2 d\varphi \text{ területet,} \end{aligned} \right\} (1)$$

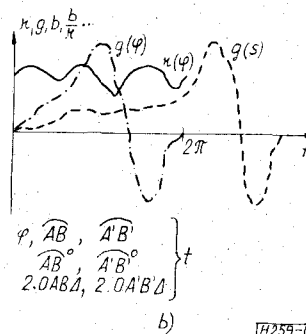
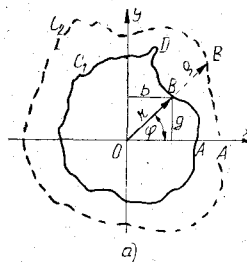
hogy csak néhány lehetőséget említsünk. Cikkünkben csak az így definiált változókat fogjuk felhasználni és  $t$ -vel fogjuk jelölni. Az 1b ábrának megfelelően a kördiagramhoz kapcsolódó Descartes-koordinátarendszerben a vízszintes tengelyt  $t$ -vel jelöljük, a függőleges tengelyre pedig  $C_1$  görbe vizsgált jellemzőjét visszük fel. Attól függően, hogy  $t$  változónak mit választunk, változik a periódus és  $f(t)$  görbe alakja is. Könnyen belátható, hogy az 1a ábra szerinti  $C_1$  görbén a  $D$  kitérülés lényeges, ha a  $t$  változó a kerületi ívhossz, és lényegtelen, ha  $t=2OAB\Delta$ , mert az  $r$  által sűrt területet lényegtelenül befolyásolja.

A 2. ábrán nagy fontossága miatt felelevenítünk egy alapvető differenciálgeometriai fogalmat. Az ábra alapján:

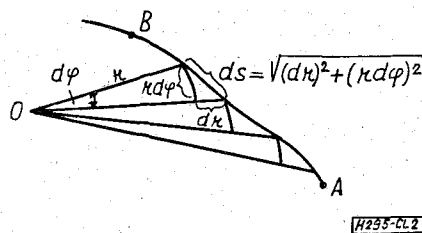
$$\widehat{AB} = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_A^B \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_A^B \sqrt{1 + (x')^2} dy \quad (2.1)$$

$$\text{vagy} \quad \widehat{AB} = \int_A^B \sqrt{(rd\varphi)^2 + (dr)^2} = \int_A^B \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \quad (2.2)$$

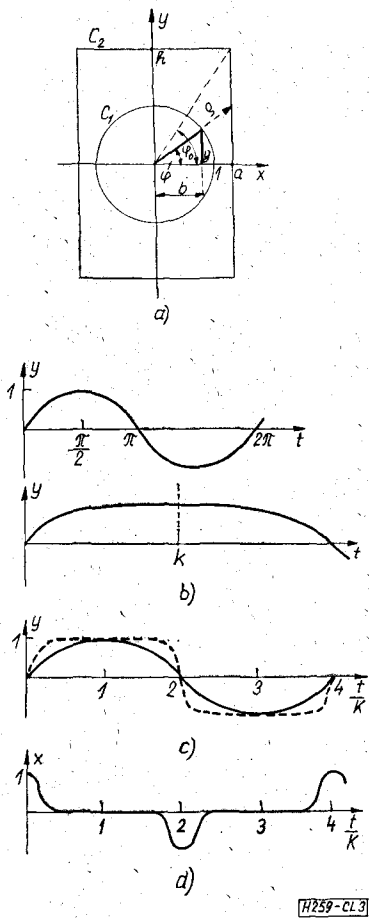
$$\widehat{AB}^\circ = \int_A^B r d\varphi. \quad (2.3)$$



1. ábra



2. ábra



3. ábra

A (2.1) és (2.2) képletek a görbe ívhosszát adják meg, függetlenül a koordináta-rendszer választásától. Fizikai problémáknál sokkal fontosabb szerepet játszik a (2.3) képlet szerinti ún. „körösített” ívhossz, amelyet a következőkben  $\widehat{AB}^\circ$ -al fogunk jelölni, hogy megkülönböztessük a szokásos értelemben vett ívhossztól. Értékét az ábra szerint úgy kapjuk meg, hogy az  $O$  origóból húzott  $r$  sugárral kis köríveket húzunk a görbe mentén. Ezen körívek együttes hossza adja  $\widehat{AB}^\circ$ -t. Értéke függ az origó választásától. A 2. ábrából ugyancsak leolvasható egy fontos egyenlőség:

$$\widehat{AB}^\circ \approx \widehat{AB}. \quad (3)$$

$C_1$  görbéből további végtelen sok periodikus függvényt származtathatunk, ha az 1a ábrának megfelelően felvesszünk egy másik tetszőleges  $C_2$  zárt görbét, és a  $C_1$  görbe valamelyik fentebb említett jellemzőjét a  $C_2$  görbe  $\varrho = \varrho(\varphi)$  egyenletéből származtatott  $\widehat{A'B'}$ ,  $\widehat{A'B'}^\circ$ ,  $2OA'B'\Delta$  stb. mennyiségekkel hozzuk kapcsolatba.

Az eddig elmondottakat egy példával szeretnénk megvilágítani. Legyen a  $C_1$  görbe a 3a ábra szerinti, egység sugarú kör, a  $C_2$  görbe pedig a  $2 \cdot a$ , ill.  $2 \cdot h$  oldalhosszúságú téglalap. Vizsgáljuk meg a  $C_1$  görbén a  $g$  távolság függvénykapcsolatát az alábbi 4 esetben. Az egyszerűség kedvéért vegyük a  $h \gg a$

esetet. A továbbiakban  $g=y$  jelölést használunk.

a)  $y$  és  $\varphi$  kapcsolata

$$\left. \begin{aligned} y &= \sin \varphi \\ t &= \varphi \end{aligned} \right\} y = \sin t \text{ független } C_2\text{-től.} \quad (4)$$

b)  $y$  és  $C_2$  ívhossza közötti kapcsolat:

$$\left. \begin{aligned} y &= \sin \varphi \\ t &= a \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \right\} y = \frac{t}{\sqrt{a^2 + t^2}}. \quad (5)$$

c)  $y$  és  $\int_0^\varphi \varrho d\varphi$  közötti kapcsolat:

$$y = \sin \varphi$$

$$t = \int_0^\varphi \varrho d\varphi = a \ln \left[ \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \right], \quad \left. \begin{aligned} t &= \frac{1}{2} a \ln \frac{1+y}{1-y} \\ y &= \operatorname{th} \frac{t}{a} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

d)  $y$  és  $\int_0^\varphi \varrho^2 d\varphi$  közötti kapcsolat:

$$y = \sin \varphi$$

$$t = \int_0^\varphi \varrho^2 d\varphi = a^2 \operatorname{tg} \varphi = \frac{t}{\sqrt{a^2 + t^2}} = \frac{\frac{t}{a}}{\sqrt{\left(a^2 + \frac{t^2}{a^2}\right)^2}}. \quad (7)$$

A  $b$ ,  $c$ , és  $d$  esetek a  $h$  oldal mentén érvényesek  $\varphi = \varphi_0$  szögig, de feltételezésünk szerint  $\varphi > \varphi_0$  esetén már  $y \approx 1$ -gyel számolhatunk.

A  $b$  és  $d$  esetek lényegében csak a  $t$  tengely irányú nyújtásban különböznek. Ez természetes is, mert példánkban a  $\varphi_0$  szögig a terület és a  $\varrho$  sugár által súrolt terület egymással arányos.

A 3b ábrán egymás alá rajzoltuk az  $a$  eset szinusz görbéjét és a  $b$ ,  $c$ ,  $d$  esetnek megfelelő görbe jellegét. Határozzuk meg az egyes esetekben egy periódus hosszát. Az irodalomban inkább a negyed periódus hosszát szokták megadni, jele  $K$ .

a) esetben:  $K = \frac{\pi}{2}$ ,

b) esetben:  $K = h + a \approx h$ , (8)

c) esetben:  $K \approx a + a \ln \frac{2h}{a} \approx a \ln \frac{2h}{a} \approx a \ln h$ ,

itt ugyanis 
$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho d\varphi = \int_0^{\varphi_0} \varrho d\varphi + \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \varrho d\varphi.$$

A második tag jó közelítéssel  $a$  értéket ad, és csak  $\frac{h}{a}$  igen nagy értékeinél hanyagolható el.

A *d*) esetben:  $K=a \cdot h$ , a  $C_2$  által bezárt terület egynegyede.

A periódusok különbözősége miatt jobban össze tudjuk a görbéket hasonlítani, ha a  $t$  tengely mentén  $K$  arányban zsugorítjuk a léptéket (3c ábra). Jól látható, hogy  $h$  növelésével a  $b$ ,  $c$ ,  $d$  esetekben  $K$  is nő és az  $y(t)$  görbe egyre inkább négyszögjel alakú lesz.

Hasonló módon egyszerűen kiszámítható, hogy a 3a ábrában a  $b$  távolság — jelöljük  $x$ -szel —  $h$  növelésére egyre jobban eltér a koszinusz görbétől és a 3d ábra szerinti lesz.  $h \rightarrow \infty$  esetén egységnyi magasságú, váltakozó előjelű impulzusokat kapunk.

1.4 A szinuszaid függvények

Ha a 1a ábrában  $C_1$ , ill.  $C_1$  és  $C_2$  görbe az  $x$  és  $y$  tengelyre szimmetrikus, akkor a  $y$ -vel jelölt távolság az (1) képlettel definiált változók bármelyikének a függvényében a szinusz függvénnyel sok tekintetben azonos tulajdonságú  $y=y(t)$  függvényt fog eredményezni. Nevezetesen:

$$\begin{aligned} y(t) &\text{ páratlan függvény, } y(0)=0, \\ t=K &\text{ negyed periódusra } y(t) \text{ szimmetrikus,} \\ y(t+2K) &= -y(t). \end{aligned}$$

A 3. ábra szerinti példánk kielégítette ezeket a feltételeket.

A fenti tulajdonságok alapján elegendő  $y(t)$ -t egy negyed periódusra meghatározni,  $t$  egyéb értékeihez  $y(t)$  már egyszerűen számítható.

A következőkben az egyes függvénycsaládoknál — vagyis a  $C_1$ , illetve az összetartozó  $C_1$  és  $C_2$  görbénél — a  $g$  távolság függvényét vizsgáljuk, és belőle származtatjuk a többi függvényt. Érthető, hogy a  $g=y=f(t)$  kapcsolatot az illető görbe szinuszának fogjuk nevezni, az így nyert függvényeket pedig szinuszoid függvényeknek.

Idealizált fizikai folyamatok leírásakor a leggyakoribb esetekben a  $C_1$  illetve  $C_2$  görbe kör, hiperbola vagy ellipszis. Mivel a hiperbola (cikkünkben hiperbolán mindig a  $90^\circ$  asszimptota szögű hiperbolát értjük) a kör folytatásának tekinthető, a kör pedig az ellipszis egy speciális esete, nyilvánvaló, hogy az ellipszishoz rendelt függvények a legáltalánosabbak, a kör és hiperbola függvényei pedig csak határesetet jelenthetnek.

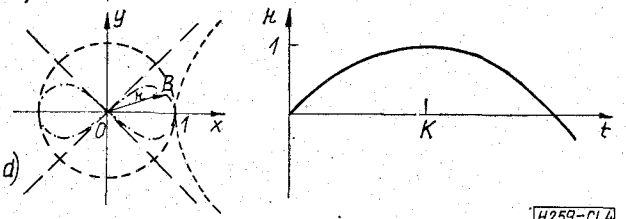
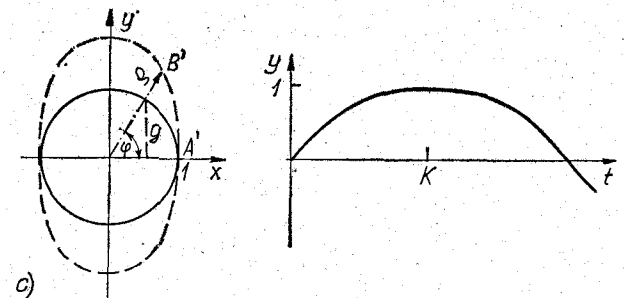
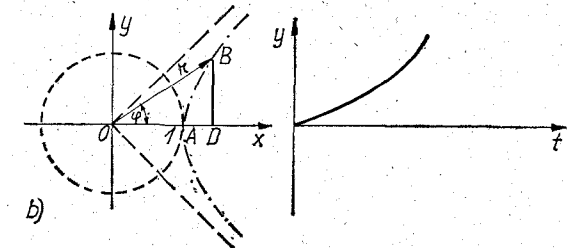
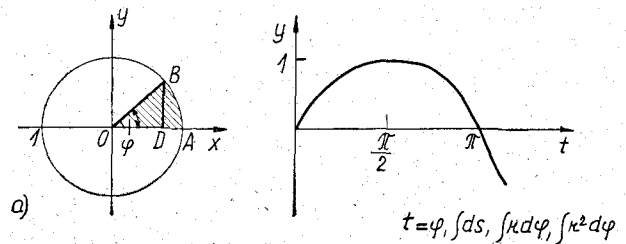
Az érthetőség kedvéért a következőkben mégis nem az általános esetből indulunk ki, hanem külön-külön vizsgálunk meg négy speciális szinusz függvényt, és utána mutatunk rá a közös származásra.

1.5 Az  $y = \sin t$ ,  $y = sh t$ ,  $y = sn t$  és  $y = sl t$  geometriai származtatása

1.5.1 Az  $y = \sin t$  függvény

Ismeretes, hogy a 4a ábra szerinti egység sugarú körben a  $\overline{BD}$  távolság határozza meg az  $y = \sin t$  függvényt. Kevésbé magától értetődő azonban, hogy mit értünk  $t$  alatt az összetartozó  $(y, t)$  kapcsolatban. Először  $t$ -t önkénytelenül is a  $\varphi$  szöggel azonosítjuk, de azonnal belátható, hogy egység sugarú kör esetén

$$t = \varphi = \widehat{AB} = \widehat{AB'} = 2 \cdot OAB \quad (9)$$



4. ábra

egyaránt érvényes. Így a szinusz függvény kapcsolatot teremt a  $\overline{BD}$  távolság és a hozzá tartozó  $\varphi$  szög vagy  $\widehat{AB}$  körív, vagy  $2 \cdot OAB$  terület között. Mindenesetre a

$$t = \text{arc sin } y$$

inverz függvényben az arc szó arra utal, hogy eredetileg a szinusz alatt a  $\overline{BD}$  távolság és az  $\widehat{AB}$  ív közötti kapcsolatot értették.

A (9) egyenlőség módot ad  $t$  másik értelmezésére is. Az  $x^2 + y^2 = 1$  kör ívhossza (2.1) alapján ugyanis:

$$t = \int_A^B ds = \int_0^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \quad (10)$$

Az analízisből ismert, hogy a fenti integrál arc sin  $y$ -t ad. Ilyen módon a (10) egyenlet felfogható mint az  $y = \sin t$  vagy  $t = \text{arc sin } y$  függvények alapvető, nem geometriai definíciója, mert az 1.1 pontban tárgyalt módon egyértelmű kapcsolatot teremt  $y$  és  $t$  között. Mindenesetre meg kell jegyeznünk, hogy a (10) integrál  $y$ -nak csak  $\pm 1$  közötti

tartományában értelmezhető, vagyis csak egy negyed periódust ír le. De a szinuszejleg miatt ez elegendő az  $y = \sin t$  függvény teljes leírására.

1.5.2 Az  $y = \text{sh } t$  függvény

A 4b ábra szerinti hiperbola egyenlete:

$$x^2 - y^2 = 1$$

vagy:

$$r = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \quad (11)$$

A körhöz hasonlóan most is kereshetjük az összefüggést a  $\overline{BD}$  távolság és a  $\varphi$  szög, az  $\widehat{AB}$  ívhossz, az  $\widehat{AB}^\circ$  körösített ívhossz és a  $2 \cdot OAB$  terület között. Gyakorlatban csak ez utóbbi használatos, amikor

$$t = [\widehat{AB}] = \int_A^B \sqrt{(dx)^2 + (j dy)^2} = j \int_0^y \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = j \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}},$$

mert  $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}$ .

Meg kell jegyeznünk, hogy itt  $[\widehat{AB}]$  nem a hiperbola  $\widehat{AB}$  ívhossza, hanem csak formailag analóg vele.

$j$ -t  $y$ -ban és  $t$ -ben elhagyva, a  $t$  és  $y$  közötti kapcsolat:

$$t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \text{ar sh } y \quad (14)$$

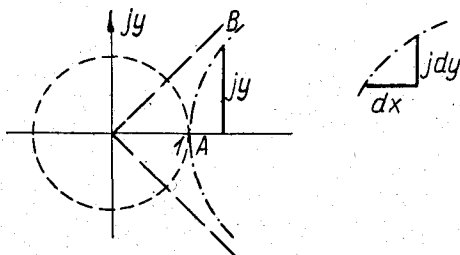
$$y = \text{sh } t.$$

A (14) egyenlőség a hiperbolikus szinuszfüggvény integrál-definíciójának tekinthető.

Az  $y = \text{sh } t$  a valós tartományban nem periodikus, csupán a kör és hiperbola közötti szoros rokonság miatt tárgyaltuk itt.

1.5.3 Az ellipszis jellemzői

Mielőtt rátérnénk az elliptikus függvények tárgyalására, röviden összefoglaljuk az ellipszis főbb jellemzőit. Amíg a kört és hiperbolát egyetlen adat, a fél átmérő jellemzi, addig az ellipszis esetén két adat szükséges. Ha a lineáris méretek arányától eltekintünk, körnél és hiperbolánál nincs szükségünk



5. ábra

H259-CL5

a / változó az r sugár által súrolt területtel arányos.

$$t = \int_A^B r^2 d\varphi = \int_A^B \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) = \text{sh } y \quad (12)$$

$$\text{és } y = \text{sh } t.$$

Tehát a hiperbolikus szinuszfüggvény a  $\overline{BD}$  távolság és a  $2 \cdot OAB$  terület között ad kapcsolatot. A hiperbolát joggal tekinthetjük az

$$y = \sqrt{1 - x^2} = j\sqrt{x^2 - 1} \quad (13)$$

kör képzetes folytatásának  $x > 1$  esetén. Az 5. ábrának megfelelően, a (2.1) ívhosszformulával formailag számolva:

egyéb adata, a megnevezés önmaga elegendő, az ellipszist viszont egyetlen adattal határozhatjuk meg.

Általában a  $k$  numerikus excentricitással szoktuk az ellipszist jellemezni, vagy pedig  $k = \sin \alpha$  összefüggésből az excentricitás  $\alpha$  szögével.

A 6a ábrán ábrázoltuk az ellipszis főbb jellemzőit.  $k = 0$  esetén az ellipszis körbe megy át,  $k = 1$  esetben pedig  $2a$  hosszúságú egyenessé fajul.

Koordinátarendszerben az ellipszist olyan helyzetben szoktuk felvenni, hogy az ellipszissel kapcsolatos összefüggések a lehető legegyszerűbbek legyenek. Ugyanezen okból az ellipszis normál alakjával számolunk, ahol a fél nagy vagy kis átmérő hossza egységnyi. Mi a továbbiakban a 6b, ill. 6c ábra szerinti ellipszissel fogunk számolni.

A fentiek alapján nyilvánvaló, hogyha bármilyen ellipszissel kapcsolatos problémával, például az ellipszissel kapcsolatos függvényekkel foglalkozunk, akkor szükséges egy jellemző érték,  $k$  vagy  $\alpha$  megadása, hogy tudjuk, milyen alakú ellipszistről van szó. Körnél és hiperbolánál ez nem volt szükséges. A következőkben  $k$ , ill.  $\alpha$  az ellipszis jellemző paramétere lesz.

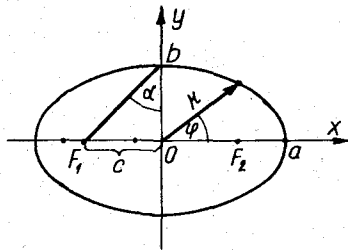
1.5.4. Az  $y = \text{sn } t$  elliptikus szinuszfüggvény

A kör- és hiperbolikus szinuszfüggvény esetén csak egyetlen  $C_1$  görbére volt szükségünk a keresett függvénykapcsolathoz. Tekintsük most a 4c ábrát, ahol a  $C_1$  görbe egység sugarú kör, a  $C_2$  görbe pedig a 6b ábra szerinti ellipszis. Keressük az összefüggést az

$y = g$  távolság és  $t = \int_{A'}^{B'} \varrho d\varphi$  között. Az ellipszis polár egyenletéből azonnal kapjuk:

$$t = \int_{A'}^{B'} \varrho d\varphi = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (15)$$

és  $y = \sin \varphi$ .



a)

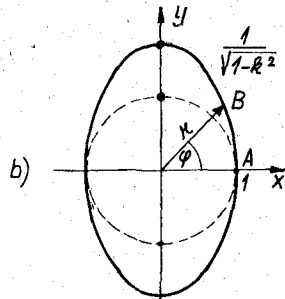
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$k = \frac{a\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-k^2}\cos^2\varphi}$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$k^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

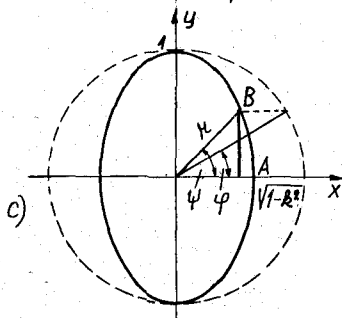
$$k = \sin\alpha$$



b)

$$x^2 + (1-k^2)y^2 = 1$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}\sin^2\varphi}$$



c)

$$\frac{x^2}{1-k^2} + y^2 = 1$$

$$k = \frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-k^2}\sin^2\psi}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1-k^2}}$$

H259-CL6

6. ábra

Áttérve az  $y, t$  koordinátákra, a

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \text{ helyettesítéssel:}$$

$$t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \quad (16)$$

(15), ill. (16) alapvető összefüggést ad  $t, \varphi$  és  $y$  között. Az így definiált függvény az elliptikus vagy Jacobi-színusz és inverze:

$$t = \operatorname{sn}^{-1}y, \quad (17)$$

$$y = \operatorname{sn} t.$$

Az  $y = \operatorname{sn} t$  jelölés helyett helyesebb az  $y = \operatorname{sn}(t, k)$  jelölés, mert a  $k$  mint konstans paraméter szerepel az integrálban.

A fentieket összefoglalva, az elliptikus szinusz függvényt legegyszerűbben úgy jellemezhetjük, hogy az egységsugarú körön a  $\varphi$  szöghöz tartozó  $y$  metszetet hozzárendeljük a  $k$  paraméterű ellipszisen a  $\varphi$  szöghöz tartozó körösített ívhosszhoz.

1.5.5 Az  $y = \operatorname{sl} t$  lemniszkáta szinusz

A 4d ábra szerinti normált lemniszkáta egyenlete:

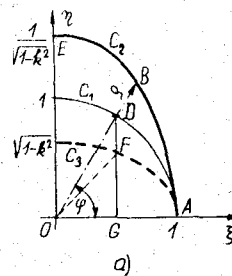
$$r = \sqrt{\cos 2\varphi}. \quad (18)$$

(11)-gyel összehasonlítva látszik, hogy a lemniszkátát a hiperbolának az egységsugarú körre vett inverziójából kapjuk. Ez a származtatás indokolja a körfüggvényekkel való közeli rokonságát. Definíciószerűen a lemniszkáta szinusz a görbe  $t$ -vel jelölt ívhossza és az  $r$  sugár között ad kapcsolatot:

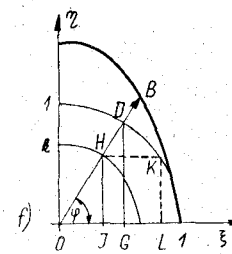
$$t = \int_0^B ds = \int_0^B \sqrt{r^2 + i^2} d\varphi = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} \quad (19)$$

és  $r = \operatorname{sl} t$ .

A lemniszkáta függvényekkel cikkünkben nem foglalkozunk részletesen, csak az irodalomra utalunk [10].



a)

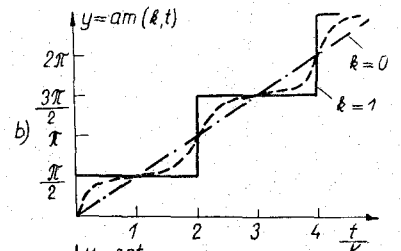


f)

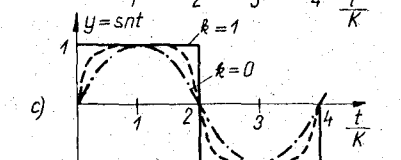
$$\overline{DG} = \operatorname{sn}(t, k)$$

$$\overline{HJ} = \overline{KL} = k \operatorname{sn}(t, k)$$

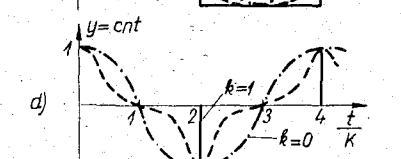
$$\overline{OL} = \sqrt{1-k^2} \operatorname{sn}^2(t, k) = \operatorname{dn}(t, k)$$



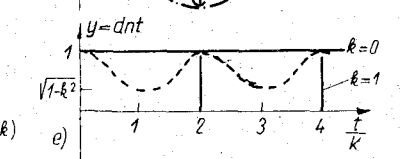
b)



c)



d)



e)

H259-CL7

7. ábra

## 2. Az elliptikus függvények családja

A 4c ábrán a körfüggvényekhez hasonlóan geometriai úton definiálhatunk elliptikus függvényeket, vagy pedig a már megismert  $y = \sin t$ -ből algebrai úton származtathatunk újabbakat az alább ismertetett módon. Először a 7. ábrán felrajzoljuk a 6b ábra szerinti ellipszis első negyedét. Mivel a továbbiakban az  $y = f(t)$  függvények vizsgálatánál  $y$  nem függőleges,  $y$  tengely irányú távolságot jelöl, a félreértések elkerülésére a kördiagramban  $\xi$ ,  $\eta$  koordinátákat használunk.

Újból felhívjuk a figyelmet arra a talán primitívnek ható tényre, hogy függvénykapcsolaton táblázat szerinti egymáshoz rendelést értünk. A következőkben is állandóan hangsúlyozni fogjuk, hogy melyik az a két változó, amelyet egymáshoz rendelünk, és amelyek az  $y = f(t)$ , illetve  $t = f^{-1}(y)$  függvényeket meghatározzák.

Tizenhárom különböző elliptikus függvényt szoktak definiálni. Ezekből az egyik, a szinusz amplitúdó nem tartozik a szoros értelemben vett elliptikus függvények közé. Három függvény gyakrabban szerepel, míg a fennmaradó kilenc csak ritkábban.

### 2.1 Az $y = \operatorname{am}(t, k)$ szinusz amplitúdó függvény

A  $\varphi$  szög és a  $t = \int_A^B \varrho \, d\varphi$  közötti kapcsolatot a 7a ábrán a

$$t = \int_0^\varphi \varrho \, d\varphi = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (20)$$

integrál fejezi ki. Az inverz függvény az amplitúdó szinusz vagy Jacobi-féle amplitúdó:

$$\varphi = \operatorname{am}(t, k). \quad (21)$$

Mivel  $\varphi$  az  $\widehat{AD}$  körívvel azonosítható, az  $\operatorname{am}(t, k)$  függvény a kör  $\widehat{AD}$  ívhossza és az ellipszis  $\widehat{AB}^{\circ}$  körösített ívhossza közötti kapcsolatot adja meg. A 7b ábra mutatja a függvény periodikusan emelkedő alakját.

$$\begin{aligned} \operatorname{ns}(t, k) &= \frac{1}{\operatorname{sn}(t, k)}, & \operatorname{sc}(t, k) &= \frac{\operatorname{sn}(t, k)}{\operatorname{cn}(t, k)}, & \operatorname{cd}(t, k) &= \frac{\operatorname{cn}(t, k)}{\operatorname{dn}(t, k)}, \\ \operatorname{cn}(t, k) &= \frac{1}{\operatorname{sn}(t, k)}, & \operatorname{sd}(t, k) &= \frac{\operatorname{sn}(t, k)}{\operatorname{dn}(t, k)}, & \operatorname{ds}(t, k) &= \frac{\operatorname{dn}(t, k)}{\operatorname{sn}(t, k)}, \\ \operatorname{nd}(t, k) &= \frac{1}{\operatorname{dn}(t, k)}, & \operatorname{cs}(t, k) &= \frac{\operatorname{cn}(t, k)}{\operatorname{sn}(t, k)}, & \operatorname{dc}(t, k) &= \frac{\operatorname{dn}(t, k)}{\operatorname{sn}(t, k)}. \end{aligned} \quad (26)$$

## 3. Műveletek elliptikus függvényekkel

A következőkben levezetés nélkül közöljük az elliptikus függvényekkel kapcsolatos fontosabb műveleteket. A rövidség kedvéért nem fogjuk kiírni a  $k$  paraméter jelét, de figyelembe kell venni, hogy egy képletben belül minden elliptikus függvény azonos  $k$  paraméterű.  $k=0$  esetén a körfüggvények megfelelő összefüggéseit kapjuk.

2.2 Az  $y = \operatorname{sn}(t, k)$ ,  $y = \operatorname{cn}(t, k)$  elliptikus szinusz és koszinusz, valamint az  $y = \operatorname{dn}(t, k)$  függvény

A továbbiakban is a  $t$  változót a  $C_2$  ellipszisen a

$$t = \int_0^\varphi \varrho \, d\varphi = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

összefüggés határozza meg. A 7a ábrába berajzoltuk  $C_3$  ellipszist, amelyet a  $C_1$  körnek az  $\eta$  irányú,  $\sqrt{1 - k^2}$  arányú zsugorításával nyerünk. Ezután definiáljuk az ábrán a következő távolságokat:

$$\left. \begin{aligned} \overline{DG} &= \sin \varphi \\ \overline{OG} &= \cos \varphi \end{aligned} \right\} \text{ a } C_1 \text{ körön}$$

$$\overline{OF}^2 = \overline{OG}^2 + \overline{GF}^2 = \cos^2 \varphi + (1 - k^2) \sin^2 \varphi = 1 - k^2 \sin^2 \varphi$$

a  $C_3$  ellipszisen.

Az egyes fent definiált távolságok és  $t$ , illetve  $\varphi$  közötti összefüggések alapján:

$$\operatorname{sn}(t, k) = \overline{DG} = \sin \varphi = \sin \operatorname{am}(t, k) \quad (22)$$

$$\operatorname{cn}(t, k) = \overline{OG} = \cos \varphi = \cos \operatorname{am}(t, k) \quad (23)$$

$$\operatorname{dn}(t, k) = \overline{OF} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \quad (24)$$

(A 7f ábra szerint is értelmezhetjük  $\operatorname{dn}(t, k) - t$ ) (22)-ből és (23)-ból azonnal következik:

$$\operatorname{sn}^2(t, k) + \operatorname{cn}^2(t, k) = 1. \quad (25a)$$

A három függvényt a 7c, d, e ábrán ábrázoltuk.  $k=0$  esetén,  $C_1$ ,  $C_2$  és  $C_3$  görbe az egységsugarú körbe megy át és

$$\operatorname{sn}(t, 0) = \sin t, \quad \operatorname{cn}(t, 0) = \cos t, \quad \operatorname{dn}(t, 0) = 1. \quad (25b)$$

$k=1$  esetén a  $C_2$  ellipszis a  $\xi = \pm 1$ -ben emelt függőleges egyenesbe megy át, a  $C_3$  ellipszis pedig a  $\xi$  tengelyen a  $\pm 1$  közti egyenesbe:

$$\operatorname{sn}(t, 1) = \operatorname{th} t, \quad \operatorname{cn}(t, 1) = \operatorname{dn}(t, 1) = \frac{1}{\operatorname{ch} t}. \quad (25c)$$

### 2.3 További kilenc elliptikus függvény

A 2.2 pont szerinti elliptikus függvényekből újabbakat származtathatunk. Ezeknek kisebb a jelentőségük, csak felsorolásukra szorítkozunk.

### 3.1 Összegezés

$$\operatorname{sn}(t+v) = \frac{\operatorname{sn} t \cdot \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} t \cdot \operatorname{dn} t}{1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 t \cdot \operatorname{sn}^2 v}, \quad (27)$$

$$\operatorname{cn}(t+v) = \frac{\operatorname{cn} t \cdot \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} t \cdot \operatorname{dn} t \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 t \cdot \operatorname{sn}^2 v}, \quad (28)$$

$$\operatorname{dn}(t+v) = \frac{\operatorname{dn} t \cdot \operatorname{dn} v - k^2 \cdot \operatorname{sn} t \cdot \operatorname{cn} t \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}^2 t \cdot \operatorname{sn}^2 v}. \quad (29)$$

Ha  $k=0$ ,  $\operatorname{sn}(t+v) = \sin(t+v) = \sin t \cdot \cos v + \sin v \cdot \cos t$ . Ha  $v=K(k)$ , vagyis egy negyed periódus:

$$\operatorname{sn}(t+K) = \frac{\operatorname{cn} t}{\operatorname{dn} t}, \quad (30)$$

$$\operatorname{cn}(t+K) = -\sqrt{1-k^2} \frac{\operatorname{sn} t}{\operatorname{dn} t}, \quad (31)$$

$$\operatorname{dn}(t+K) = \frac{\sqrt{1-k^2}}{\operatorname{dn} t}. \quad (32)$$

(30)-ból és (31)-ből leolvashatjuk azt a fontos tényt, hogy az  $\operatorname{sn} t$  és  $\operatorname{cn} t$  függvények nem abban különböznek, hogy a  $t$  tengely mentén egy negyed periódussal el vannak tolvaa egymáshoz képest, hanem alapvetően más természetűek, amint ezt a 7c és 7d ábra is mutatja. Az  $\operatorname{sn}(t+K) = \operatorname{cn} t$  összefügg és csak  $k=0$  esetben áll fenn, amikor  $K = \frac{\pi}{2}$  és  $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$ .

### 3.2 Négyzetre emelés

$$\operatorname{sn}^2 t = \frac{1 - \operatorname{cn} 2t}{1 + \operatorname{dn} 2t}, \quad (33)$$

$$\operatorname{cn}^2 t = \frac{\operatorname{cn} 2t + \operatorname{dn} 2t}{1 + \operatorname{dn} 2t}, \quad (34)$$

$k=0$  esetén  $\operatorname{sn} t$  és  $\operatorname{cn} t$  sora megegyezik  $\sin t$  és  $\cos t$  sorával.

### 3.6 Fourier-sorok

Mint minden periodikus függvénynek, az elliptikus függvényeknek is képezhetjük a Fourier-sorát. Az alapfrekvenciát a  $4K(k)$  periódus határozza meg.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$k' = \sqrt{1-k^2} = \cos \alpha,$$

$K(k')$  a  $k'$ -höz tartozó negyed periódus.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy  $K(k')$  a képzetes tengely menti negyed periódus, és

$$q = e^{-\pi \frac{K(k')}{K(k)}}.$$

A 7. ábrának megfelelően, a  $t$  tengely menti  $K$ -szoros zsgoritással:

$$\operatorname{sn}(Kt, k) = \frac{2\pi}{K \cdot k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sin \frac{2n+1}{2} \pi t,$$

$$\operatorname{dn}^2 t = \frac{\operatorname{dn} 2t + k^2 \cdot \operatorname{cn} 2t + (1-k^2)}{1 + \operatorname{dn} 2t}, \quad (35)$$

$$k^2 \operatorname{sn}^2 t \cdot \operatorname{cn}^2 t \operatorname{dn}^2 t = \frac{1 - \operatorname{dn} 2t}{1 + \operatorname{dn} 2t}. \quad (36)$$

### 3.3 Differenciálás

$$(\operatorname{sn} t)' = \operatorname{cn} t \cdot \operatorname{dn} t$$

$$(\operatorname{cn} t)' = -\operatorname{sn} t \cdot \operatorname{dn} t \quad (37)$$

$$(\operatorname{dn} t)' = -k^2 \operatorname{sn} t \cdot \operatorname{cn} t$$

### 3.4 Integrálás

$$\int_0^t \operatorname{sn} t \, dt = \frac{1}{k} \ln \frac{\operatorname{dn} t - k \operatorname{cn} t}{1-k}$$

$$\int_0^t \operatorname{cn} t \, dt = \frac{1}{k} \operatorname{arc} \cos \operatorname{dn} t \quad (38)$$

$$\int_0^t \operatorname{dn} t \, dt = \operatorname{arc} \cos \operatorname{cn} t$$

### 3.5 Hatványsorok

$$\operatorname{sn} t = t - (1+k^2) \frac{t^3}{3!} + (1+14k^2+k^4) \frac{t^5}{5!} - (1+135k^2+135k^4+k^6) \frac{t^7}{7!} + \dots$$

$$\operatorname{cn} t = 1 - \frac{t^2}{2!} + (1+4k^2) \frac{t^4}{4!} - k^2(16+44k^2+k^4) \frac{t^6}{6!} \pm \dots \quad (39)$$

$$\operatorname{dn} t = 1 - k^2 \frac{t^2}{2!} + k^2(4+k^2) \frac{t^4}{4!} - k^2(16+44k^2+k^4) \frac{t^6}{6!} \pm \dots$$

$$\operatorname{cn}(Kt, k) = \frac{2\pi}{K \cdot k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}} \cos \frac{2n+1}{2} \pi t, \quad (40)$$

$$\operatorname{dn}(Kt, k) = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos \frac{2n+1}{2} \pi t.$$

## 4. Az első- és másodfajú elliptikus integrál

### 4.1 Az elsőfajú elliptikus integrál

Elliptikus függvényeknél a  $t$  változó a 6b, illetve 7a ábra ellipszisének a kerületén vett  $t = \int_{A'}^{B'} \varrho \, d\varphi$

körösített ívhossz volt. Ezt az integrált, amely már a (15) és (16) képletben is szerepelt, elsőfajú elliptikus integrálnak nevezik, és  $F(k, \varphi)$ -vel jelölik:

$$t(k, \varphi) = F(k, \varphi) = \int_{A'}^{B'} \varrho \, d\varphi = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} =$$



$$= \int_0^y \frac{dy}{(1-y^2)(1-k^2y^2)} \quad (41)$$

Összefüggést ad  $t, \varphi$  és a kör  $y$  metszete (6b ábra) között. Elemi úton nem számolható ki, értékeit táblázatból vehetjük: [8] 62. és [11] 194. old.

$$S(k, \varphi) = E(k, \varphi) = \int_A^B ds = \int_0^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^y \sqrt{\frac{1-k^2y^2}{1-y^2}} dy = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (42)$$

Az ellipszis kerületét kifejező  $E(k, \varphi)$ -t másodfajú elliptikus integrálnak nevezzük.

A fenti integrálban lényeges megjegyezni, hogy az  $\widehat{AB}$  ívhez tartozó szög  $\varphi$  és nem  $\psi$ .

A 6c ábrából egyszerűen kiolvasható az összefüggés  $\varphi$  és  $\psi$  között:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1-k^2}} \quad (43)$$

Ha közvetlenül  $\psi$  függvényében akarnánk az ellipszis kerületét kifejezni, akkor a (2.2) képletből kellene kiindulnunk, és lényegesen bonyolultabb formulát kapnánk.

$E(k, \varphi)$  elemi úton nem integrálható, értékeit  $F(k, \varphi)$ -hez hasonlóan táblázatból vehetjük [8], [11].

### 4.3 $F(k, \varphi)$ és $E(k, \varphi)$ grafikus ábrázolása

$F(k, \varphi)$  és  $E(k, \varphi)$  menetét a 8. ábra szemlélteti.  $k=0$  esetben  $F(0, \varphi) = E(0, \varphi)$ , ekkor az ellipszis körbe megy át és:

$$K(k) = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{dy}{(1-y^2)\sqrt{1-k^2y^2}} \quad (44)$$

az elsőfajú teljes elliptikus integrál.

Hasonlóképpen a 6c ábra szerinti ellipszis negyed kerülete:

$$E(k) = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2y^2}{1-y^2}} dy \quad (45)$$

a másodfajú teljes elliptikus integrál.

Lemniszkáta esetén is definiálhatjuk a negyed periódust mint a görbe kerületének a negyedét:

$$\frac{S}{4} = \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = 1,3111. \quad (46)$$

$K(k)$  és  $E(k)$  értékeit táblázatokból vehetjük [11] 214. old.

### 4.2 A másodfajú elliptikus integrál és az ellipszis ívhossza

Az ellipszis ívhosszára a legegyszerűbb kifejezést akkor kapjuk, ha a 6c ábrának megfelelő normál esetet vesszük. A (2.1) képlet szerint és  $y = \sin \varphi$  helyettesítéssel:

$$F(0, \varphi) = E(0, \varphi) = \int_A^B ds = \int_0^\varphi r d\varphi = \varphi,$$

egyenest kapunk.

$k=1$  esetben  $F(k, \varphi) \rightarrow \infty$ , ha  $\varphi \rightarrow 90^\circ$ ,

$$E(k, \varphi) \rightarrow 1, \quad \text{ha } \varphi \rightarrow 90^\circ.$$

Az első esetben ugyanis  $\int_A^B r d\varphi \rightarrow \infty$  a 6b ábrának

megfelelően, a második esetben pedig az ellipszis a 6c ábra szerinti, 2 hosszúságú egyenespárba megy át, amelynél a kerület negyed hossza éppen 1.

### 5. Az első- és másodfajú teljes elliptikus integrál és a negyed periódus

Az 1.4 pontban a szinuszoid függvényekkel kapcsolatban bevezettük  $K$ -t a negyed periódust. A kördiagramon egy negyed periódusnak  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  felelt meg, a  $t$  változóban pedig:

### 5.1 $K(k)$ és $E(k)$ közelítő formulái

Bevezetve a  $p = \frac{k^2}{8}$  tényezőt:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} [1 + 2p + 9p^2 + 50p^3 + 306p^4 + \dots], \quad (47)$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} [1 - 2p - 3p^2 - 10p^3 - 44p^4 - \dots].$$

Ha  $k \approx 1$ , jobb közelítést ad:

$$K(k) \approx f + \frac{1}{4}(f-1)k^2 + \frac{9}{64}\left(f - \frac{7}{6}\right)k^4 + \frac{25}{256}\left(f - \frac{37}{30}\right)k^6 + \dots$$

$$E(k) \approx 1 + \frac{1}{2}\left(f - \frac{1}{2}\right)k^2 + \frac{3}{16}\left(f - \frac{13}{12}\right)k^4 + \frac{15}{128}\left(f - \frac{6}{5}\right)k^6 + \dots$$
(48)

Itt  $f = \ln \frac{4}{k'}$  és  $k'^2 = 1 - k^2$ .

$k^2 > 0,95$  esetén  $K(k)$  értéke igen jó közelítéssel:

$$K(k) \approx f = 1,4 + \ln \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \approx 1,05 + \ln \frac{1}{\sqrt{1-k}} \approx \ln \frac{1}{1-k}.$$
(49)

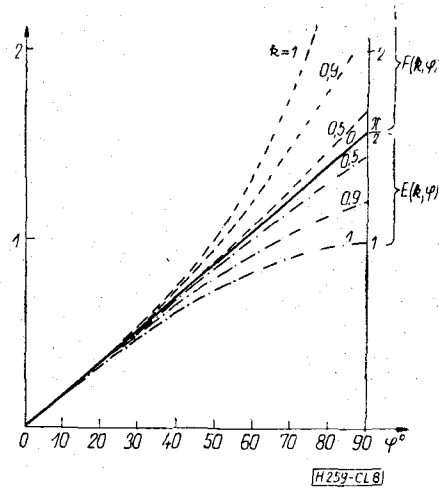
A 3a és 6b ábrát, ill. a (8) és (49) képletet összehasonlítva könnyen belátható, hogy a 3a ábrában  $a=1$ -et véve, és a  $h$  magasságot, illetve a 6b ábrában az ellipszis nagy féltengely hosszát növelve, a periodikus függvények, amelyeket hozzájuk rendelhetünk, egyre jobban hasonlítani fognak egymásra. Mindkét eset a  $\pm 1$  pontban emelt függőleges egyenes esete felé közeledik.

### 5.2 Példa

Számoljuk ki  $y = \text{sn}(t, k)$  értékeit az 1. táblázatban megadott  $k^2$  értékek esetén, — ha  $t = 0,2 K(k)$  A számítás a következő lépésekben történik:

- a) Kiszámítjuk  $K(k)$  értékeit. Vagy táblázatot használunk, vagy a (48), ill. (49) közelítő  $(k)$  formulát. A 2. táblázatban  $k^2 > 0,95$  esetén a (49) képlettel számoltunk;
- b) minden  $k$ -hoz kiszámítjuk  $t = 0,2K$  értékét;
- c) a 4.1 pontnak megfelelően  $F(k, \varphi)$  táblázatból kikeressük a  $t$ -hez tartozó  $\varphi$  értéket;
- d) az  $y = \text{sn}(t, k) = \sin \varphi$  egyenlőségből (22) meghatározzuk  $y$  értékét.

Az egyes lépések eredményeit az 1. táblázatban foglaltuk össze. Mivel a  $k=0$  eset az  $y = \sin t$  függvénynek felel meg, a táblázat alapján meg tudjuk állapítani, hogy  $k$  növelésével milyen mértékű a szinusztól való eltérés.



8. ábra

### 6. Az elliptikus függvények integrál-származtatása

Egyszerű geometriai megfontolások alapján eljutottunk a (10), (14), (16) és (19) formulákkal értelmezett szinusz függvényekig. A lemmiszkátánál is az  $r$  változót  $y$ -nal jelölve, a négy szinusz definíciója:

$$y = \sin t, \quad t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y,$$

$$y = \text{sh } t, \quad t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \text{ar sh } y,$$

$$y = \text{sn } t, \quad t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-(1+k^2)y^2+k^2y^4}} = \text{sn}^{-1} y,$$

$$y = \text{sl } t, \quad t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = \text{sl}^{-1} y.$$
(50)

A bal oldalon az  $y=f(t)$  alapfüggvények állnak, amelyek azonban csak matematikai szimbólumok. Viszont a  $t=f^{-1}(y)$  inverz függvények teljesen egyértelmű függvénykapcsolatot jelentenek, ezért alkalmasak arra, hogy a fenti szinusz függvényeket velük definiáljuk, és az  $y=f(t)$  függvényt tekintsük

származtatottnak. Ez annál is indokoltabb, mert mind a négy fenti szinusz egységesen a

$$t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+my^2+ny^4}} \tag{51}$$

$k^2$		0	0,9	0,95	0,99	0,999	0,9999	0,99999
$\alpha^\circ$		0	71,5	77,1	84,3	88,1	89,4	89,5
$K$		1,571	2,579	2,91	3,70	4,85	6,00	7,15
$t = 0,2K$		0,314	0,519	0,582	0,74	0,97	1,2	1,43
$\varphi^\circ$		18	28,4	31,5	39	48,5	56,5	63,1
$\sin\varphi$ $\operatorname{sn}(t, k)$		0,309	0,475	0,522	0,629	0,749	0,834	0,891

integrálból származtatható, ahol  $m$  és  $n$  konstansak. (50) és (51) összevetéséből:

$$\begin{aligned} m = -1, \quad n = 0 & \quad a \ t = \arcsin y, \\ m = +1, \quad n = 0 & \quad a \ t = \operatorname{arsh} y, \\ m = -(1+k^2), \quad n = k^2 & \quad a \ t = \operatorname{sn}^{-1} y, \\ m = 0, \quad n = -1 & \quad a \ t = \operatorname{si}^{-1} y \end{aligned}$$

függvényt határozza meg. Az elliptikus függvényekkel foglalkozó tankönyvek rendszerint az (51) integrált tekintik kiindulásnak, és belőle vezetnek le a speciális eseteket.

### 7. Az inga

#### 7.1 Az inga mozgásegyenlete

Az elliptikus függvények alkalmazásának klaszikus és talán legszemléletesebb példája az inga mozgásegyenlete. Csupán a végeredményre szorítunk, levezetése a mechanika könyvekben megtalálható [13] 94. old.

A 9a ábra szerinti  $l$  hosszúságú és  $\Theta_0$  szög végkitérésű inga mozgását a

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (52)$$

egyenlet határozza meg. Egyértelmű összefüggést

$$t = t(\Theta, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Theta}} = F(\varphi, k) = F[\varphi(\Theta), k]. \quad (54)$$

(20) és (21) alapján az inverz kapcsolatot:

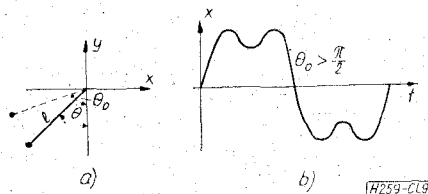
$$\varphi = \operatorname{am}(t, k),$$

$$\text{és } \sin \varphi = \sin \operatorname{am}(t, k) = \operatorname{sn}(t, k). \quad (55)$$

(53)-ba helyettesítve:

$$\sin \frac{\Theta}{2} = k \operatorname{sn}(t, k), \quad (56)$$

ad a  $t$  idő (az alsó holtponttól számítva) és a kitérés szöge,  $\Theta$  között. Az (52) egyenletben  $\varphi$  a mozgás-



9. ábra

egyenlet integrálásához bevezetett új változó,  $\varphi$  és  $\Theta$  között az összefüggés:

$$\sin \frac{\Theta}{2} = k \cdot \sin \varphi, \quad 0 \leq \Theta \leq \Theta_0 \quad (53)$$

$$\text{és } k = \sin \frac{\Theta_0}{2}.$$

#### 7.2 A normált inga

Az (52) egyenletből közvetlenül kiolvashatjuk, hogy minden  $\Theta_0$  végkitérésű inga mozgását azonos egyenlet írja le, a különbség csupán az időskála

$\sqrt{\frac{l}{g}}$  arányú nyújtásában van. Ezért elegendő az  $\frac{l}{g} = 1$  normált ingát vizsgálni ( $l = 9,81$  m a földön).

Kapjuk:

innen:

$$\Theta = 2 \cdot \arcsin k \operatorname{sn}(t, k). \quad (57)$$

Itt szeretnénk rámutatni arra, hogy az ingamozgás látszólagos egyszerűsége ellenére is igen bonyolult.

Ez főleg akkor szembetűnő, ha  $\Theta_0 > \frac{\pi}{2}$ . Ha például a kitérés  $x$  vetületét vizsgáljuk, a 9b ábra szerinti görbét kapjuk.

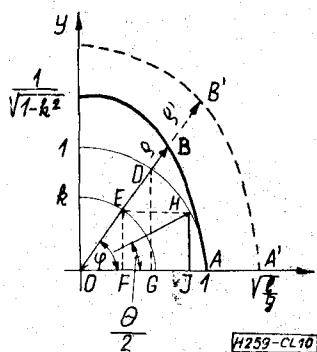
$\Theta$  explicit alakja (57) nehezen kezelhető, ezért az (56) egyenletet szokás megadni mint a legegyszerűbb,  $\text{sn}(t, k)$ -val leírható összefüggést.

7.3 A normált inga ellipszise

Joggal felmerül a kérdés, hogy ha az ingamozgást elliptikus függvényekkel fejeztük ki, akkor hogyan értelmezzük a  $k$ -val jellemzett ellipszist?

Az (56) egyenletből indulunk ki, mivel elliptikus függvénykapcsolat csak  $t$  és  $\sin \frac{\Theta}{2}$  között van.

A 10. ábrában lerajzoltuk a 7a ábra analógiáját. Az 1.5.4 pont alapján nyilvánvaló, hogy a  $\varphi$  szöghöz az ellipszis kerületén  $\widehat{AB}^\circ$  körösített ívhossz tartozik, ami az (56) egyenletben az alsó holtponttól számított  $t$  időt jelenti. A 10. ábrában a  $t$  időhöz tartozó  $\text{sn}(t, k)$  értékét az egységsugarú körön  $\overline{DG}$  távolság, a  $k \cdot \text{sn}(t, k)$  értéket pedig a  $k$  sugarú körön az  $\overline{EF}$  távolság adja.



10. ábra

$\overline{EF}$  távolságot az egységsugarú körre vetítve, a  $\sin \frac{\Theta}{2} = \overline{HI}$  egyenlőségből megkapjuk a  $\frac{\Theta}{2}$  szöget.

Végeredményben megállapíthatjuk, hogy az ingához rendelt ellipszis az a zárt görbe, amelynek a kerülete mentén a körösített ívhossz, jelen esetben a  $t$  időváltozó egyenletesen halad, miközben a kör kerületén mozgó pont az ingamozgást írja le.

A 10. ábrából látszik, hogy  $\varphi$  növelésével  $\frac{\Theta}{2}$  nő, majd  $\varphi > \frac{\pi}{2}$  esetén csökken. Vagyis  $\varphi$  folyamatos növelésére  $\Theta$  periodikusan változik  $\pm \Theta_0$  között.

7.4 Az inga lengésideje

(54)-ben  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  helyettesítéssel kapjuk a lengésidő negyedét:

$$\frac{T}{4} = K(k),$$

$$T = 4K(k) \approx 2\pi \left(1 + \frac{k^2}{4}\right). \quad (58)$$

A 2. táblázatban megadjuk a normál inga negyed periódusát néhány  $\Theta_0$  értékre. A  $\frac{K}{K_0}$  értéket is feltüntetjük, ami a lengésidő növekedésének az arányát fejezi ki kis kitérésekhez képest.

7.5 Az inga kiegészítése fogaskerék-áttétellel

Az ingamozgást azért tárgyaltuk ilyen részletes-séggel, hogy fizikai példát adjunk az elliptikus függvények alkalmazására. Azonban, amint láttuk, az ingamozgás jellemzői csak közvetve fejezhető ki elliptikus függvényekkel.

Ezért egészítsük ki az ingát a 11a ábra szerinti, 1:n áttételű fogaskerékpárral. A második fogaskerékre rögzítsünk egy  $m$  hosszúságú mutatót. Vizsgáljuk az  $m$  mutató  $y$  tengelyre vett vetületét. Mivel a fogaskerékpár a  $\Theta$  szögelfordulást  $n$  arányban lecsökkenti, kapjuk:

$$y = m \sin \frac{\Theta}{n}. \quad (59)$$

Három esetet vizsgálunk meg:

a)  $n \gg 1, \quad m = n.$

Ekkor:  $y = m \sin \frac{\Theta}{n} \approx \frac{m}{n} \Theta = \Theta.$

Így megkaptuk a  $\Theta(t)$  függvényt, amit explicite az (57) formulával csak nehezen tudunk kifejezni.  $\Theta_0$  kis értékeire  $y \approx \sin \frac{t}{T}.$

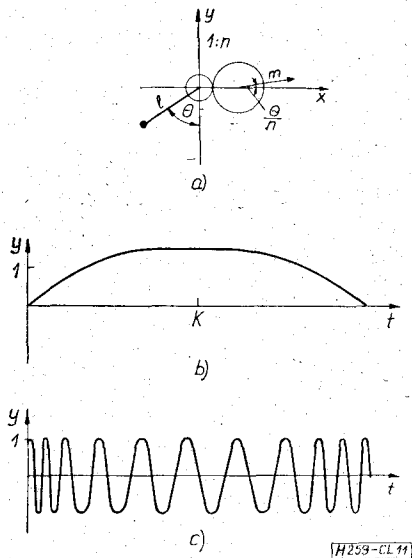
b)  $n = 2, \quad m = \frac{1}{k}.$

$$y = m \sin \frac{\Theta}{2} = m \cdot k \cdot \text{sn}(t, k) = \text{sn}(t, k).$$

Számunkra ez a legérdekesebb eset, mert így egy az ingához kapcsolt szerkezetet tudunk készíteni, amely pontosan leírja az  $\text{sn}(t, k)$  függvényt.

2. táblázat

$\Theta_0$		$\sim 0$	30	60	90	120	150	170	175	178	179	180
K		1,57	1,60	1,69	1,85	2,16	2,77	3,83	4,52	5,54	6,13	$\infty$
$K/K_0$		1	1,02	1,08	1,18	1,38	1,76	2,44	2,88	3,53	3,91	$\infty$
$t_{AB}$		-	-	-	-	-	2,77	2,06				2,03



11. ábra

Könnyen belátható, hogy  $m=1$  választással a mutató  $x$  irányú vetülete:

$$x = \operatorname{dn}(t, k). \quad (60)$$

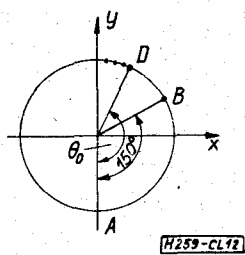
Az  $a$  és  $b$  esetben az  $y(t)$  görbe a 11b ábrán látható jellegű.

c)  $n \ll 1, \quad m=1,$   
 $y = \sin n\theta.$

Könnyen belátható, hogy  $y(t)$  a 11c ábrán látható alakú lesz, frekvenciamodulált jelhez hasonló. A pillanatnyi frekvencia az inga szögsebességével arányos.

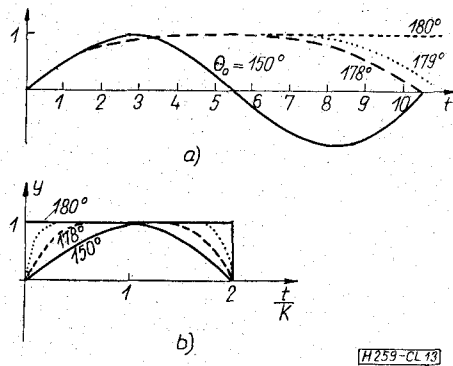
7.6  $\Theta_0 \approx \pi$  esete

Az előző pont  $b)$  esete a legalkalmasabb arra, hogy az elliptikus függvények jellegének fizikai magyarázatot adjunk. A 12. ábra szerint indítsuk az



12. ábra

ingát a  $D$  pontból, és határozzuk meg azt a  $t_{AB}$  időközt, ami a  $B$  pontból az  $A$  alsó holtponthoz (illetve fordítva) eltelik. Vegyük például a  $B$  ponthoz tartozó  $\Theta$  szöveget  $150^\circ$ -nak. A 2. táblázatban  $\Theta_0 > 150^\circ$  esetére feltüntetjük  $t_{AB}$  értékét [(54) formula]. A táblázatból világosan kitűnik, hogy  $\Theta$  növelésével a periódus időtartama rohamosan nő,  $t_{AB}$  viszont alig változik. A viszonyokat a 13. ábra szemlélteti. A 13a ábrában a  $B$  pontnak kb.  $t=2$  mp felel meg. A  $t$  időt az alsó holtponthoz számítjuk. Eddig  $\Theta_0$ -tól közel függetlenül azonosak a görbék. Utána egy elnyúlt rész következik. Az inga  $\Theta_0$  növe-



13. ábra

lésével lengésidejének egyre nagyobb részét a felső holtpont körül tölti. A 13b ábrán az egyes görbéket  $K$  arányban zsugorítva tüntettük fel. Jól látható, hogy a  $D$  pontot a felső holtponthoz közelítve, az eredő jel egyre jobban eltér a szinusz görbétől, egyre szögletesebb lesz, megfelelően az  $y = \operatorname{sn}(t, k)$  görbének, ha  $k \rightarrow 1$ .

7.7 A forgó inga

A felső holtponthoz  $v_0$  sebességgel indított inga lengőmozgás helyett egyenletlen forgó mozgást végez. [4. 120. oldal]. Így a 7.5.b esetben a mutató is körbe forog. Igazolható, hogy  $m=1$  választása mellett továbbra is:

$$y = \sin \frac{\Theta}{2} = \operatorname{sn} \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t, k \right) \quad (61)$$

Egy teljes körülfordulás ideje:

$$T = 2k \sqrt{\frac{l}{g}} K(k) \quad (62)$$

Itt:

$$k = \sqrt{\frac{2l}{v_0^2 + 2l}} \quad (63)$$

A forgó inga még szemléletesebben mutatja a kör és elliptikus függvények közötti analógiát.

Nyilvánvaló, hogy  $v_0 \approx 0$  esetén  $k \approx 1$ , a forgó inga igen egyenlőtlenül forog, eltérbe lép az elliptikus jelleg, a mozgást csak elliptikus függvényekkel tudjuk leírni. Ha  $v_0 \gg \sqrt{lg}$ ,  $k \approx 0$ , a gravitáció hatása elhanyagolható és a forgó inga jó közelítéssel egyenletes körmozgást végez, ami körfüggvényekkel írható le.

3. Befejezés

Cikkünkben igyekeztünk megadni az elliptikus függvények legegyszerűbb és legtermészetesebb tárgyalási módját. Ennek érdekében legfőbb törekvésünk az volt, hogy egyrészt párhuzamot vonjunk a kör- és az elliptikus függvények között, és így egy világos geometriai meghatározást adjunk, másrészt a matematikai inga egyes tulajdonságainak az elemzésével fizikai oldalról akartuk megvilágítani az elliptikus függvényeket.

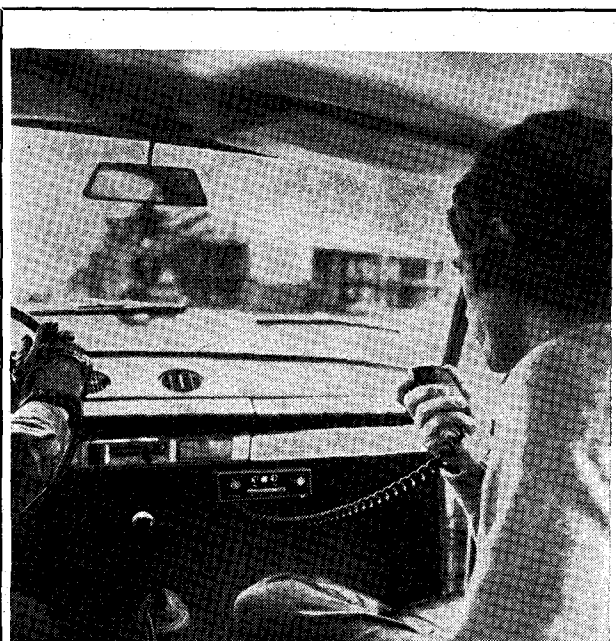
Még egyszer szeretnénk rámutatni arra, hogy az ismertett geometriai származtatás nem az egyedül lehetséges. Az 1a ábra kördiagramjában mindig található például egy olyan  $C_2$  görbe, amelyiken a  $t$  változó a körösfített ívhossz, míg a  $C_1$  görbén a terület.

Ugyancsak megjegyezzük, hogy  $C_1$ , ill.  $C_2$  görbe megválasztásával egy kis találcónysággal bárki készíthet szinusz-szerű függvényeket, azokat táblázatba foglalhatja, és műveleteket végezhet velük. A gyakorlatban nyilván csak azok a szinuszok honosodtak meg, amelyek valamelyik fizikai probléma megoldásában szerepet játszanak.

Szeretnénk még arra rámutatni, hogy az elliptikus függvények 50. formula szerinti integrálmeghatározása egyszerű módot ad a képzetes tengelyen való értelmezésre, a 27—29 összegezési formulák pedig lehetőséget adnak az elliptikus függvényeknek a komplex tartományra való kiterjesztésére.

I R O D A L O M

[1] Magnus, W.—Oberhettinger, F.: Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics. 1966.  
 [2] Oberhettinger, F.: Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik. 1949.  
 [3] Hurwitz, A.: Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Geometrische Funktionentheorie. 1925.  
 [4] Ahijezzer, N. I.: Elementü teorü ellipticeszkih funkciü. 1970.  
 [5] Tölke, F.: Praktische Funktionenlehre. I—VI. 1966.  
 [6] Hancock, H.: Theory of elliptic functions. 1958.  
 [7] Whittaker, E.—Watson, G.: A course of modern analysis. 1944.  
 [8] Jahnke—Emde: Tafeln höherer Funktionen. 1952.  
 [9] Schuler, M.: Acht und neunstellige Tabellen an den elliptischen Funktionen. 1955.  
 [10] Markusevics, A.: Zamecsatelnüe szinuszü. 1965.  
 [11] Pattantyús Á.: Matematikai képletek, táblázatok. I. 1961.  
 [12] Farkas M.: Speciális függvények. 1964.  
 [13] Budó Á.: Mechanika. 1953.  
 [14] Fazekas F.: Műszaki matematikai gyakorlatok. C. I. 1957.



## Gyorsan és megbízhatóan

továbbít és vesz híreket és információkat.

Az U 600 típusú RFT gyártmányú forgalmi rádió-telefon birtokában tetszőleges tartózkodási helyről át tudja venni az operatív irányítást és mindig beavatkozásra kész.

Segítünk az Ön hírközlési feladatának megoldásában is.

Részletes információt nyújt:

az NDK Magyarországi Nagykövetsége  
 27. Kereskedelempolitikai Osztály  
 1143 Budapest XIV.,  
 Népstadion u. 101—103.

Exportőr:

*Elektrotechnik*

**EXPORT-IMPORT**

VOLKSEIGENER AUSSENHANDELSBETRIEB DER  
 DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK  
 DDR 102 BERLIN·ALEXANDERPLATZ  
 HAUS DER ELEKTROINDUSTRIE

NÉMET DEMOKRATIKUS KÖZ-  
 TÁRSASÁG

**RFT** — **NACHRICHTENELEKTRONIK**