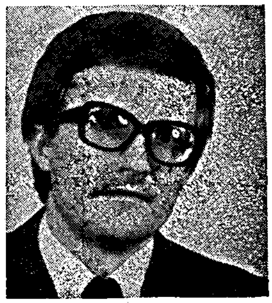
Jelek általánosított, egyidejű idő- és frekvenciatartománybeli leírásának kérdései

Dr. KOCSIS FERENC

BME Híradástechnikai Elektronika Intézet



ÖSSZEFOGLALÁS

Jelek általánosított idő- és frekvenciatartománybeli egyidejű leírásának egy lehetősége integráltranszformáció eredményeképp adódó kétváltozós függvény (eloszlás) alkalmazása. A transzformáció típusát és tulajdonságait az integráltranszformáció magfüggvénye határozza meg. A magra tett megkötések függvényében az együttes leírás különböző tulajdonságai írhatók elő. Szó esik néhány ismertebb együttes leírásának az általános összefüggésből adott magfügvénnyel való származtatásáról is.

DR. KOCSIS FERENC

1975-ben szerzett villamosmérnöki diplomát a BME Villamosmérnöki Karán, majd a Távközlési Kutató Intézetben kezdett dolgozni. Egyetemi doktori értekezését 1978-ban védte meg. 1983 szeptembere óta a BME HEI-ben dolgozik tudományos ösztöndíjasként, ahol a digitális jelfeldolgozás és jelszintézis algoritmikus kérdéseivel foglalkozik. Szakmai érdeklődési köre: rendszertechnika, digitális jelfeldolgozás, számítástechnika, algoritmusok elmélete.

1. Bevezetés

A spektrumanalízis alapvető jelentőségű a stacionárius folyamatok vizsgálatában. Fő okai: a spektrum közvetlen fizikai jelentéssel bír, mint teljesítmény-frekvencia eloszlás; a spektrális függvények központi szerepet játszanak a lineáris predikció és a szűrés elméletében; véges megfigyelésekből a spektrum viszonylag egyszerű numerikus eljárásokkal becsülhető.

Stacionárius jeleknél a spektrális tartalom az időben nem változik, vagyis a jelenenergia frekvencia szerinti eloszlásának becslésére elegendő a vizsgált jel megfelelően hosszú, de véges darabját tekinteni (ablakolás), s meghatározni az ablakolással kapott jeldarab Fourier-transzformáltja abszolútértékét. Az elérhető frekvenciafelbontás az alkalmazott ablak hosszától függ.

Nem stacionárius esetben a jelenenergia frekvencia szerinti eloszlása már időfüggő. Ily módon a hagyományos módon értelmezett, időfüggetlen spektrum már nem alkalmas az energiaviszonyok pontos jellemzésére. A probléma feloldására két eljárás terjedt el. Az első módszer ablakoláson alapszik ([7], [9]). A kiinduló feltevés szerint az ablakolás időtartama alatt a jel stacionáriusnak tekinthető. Az ablakolt jeldarab Fourier-transzformáltja azután felhasználható a jel energiaeloszlásának az ablak középpontját kijelölő időpillanatban való megadására. Az ablakot az időtartománybeli jel mentén végigcsúsztatva az idővel változó, az energiaviszonyokat jellemző eloszlás adódik (rövid idejű Fourier-transzformált, spektrogramm). A második módszer a pillanatnyi teljesítményspektrum bevezetésére épül, amelyen a jelnek olyan kétváltozós (idő és frekvencia) transzformáltját értjük, amely a jelenergia nemcsak frekvencia, hanem idő szerinti változásainak a leírására is alkalmas. Az irodalomból több különböző időfüggő spektrumfogalom is ismert ([1], [2], [3], [8]). A cikk egységes keretbe igyekszik foglalni a jelek együttes idő- és frekvenciatartománybeli leírására ismert eljárásokat.

Beérkezett: 1985. XI. 28. (H)

2. Jelek idő- és frekvenciatartománybeli leírása együttes eloszlásfüggvénnyel

Az idő- és frekvenciatartománybeli egyidejű karakterizáció történhet együttes eloszlásfüggvénnyel is. Legyen egy véges energiájú, négyzetesen integrálható $x(t)$ jelhez (Fourier-transzformáltja $X(\omega)$) tartozó együttes eloszlásfüggvény $F(t, \omega)$, amellyel szemben a jelanalízis szempontjai szerint támasztott alapvető követelmények:

— a peremeloszlások pontosan az idő-, ill. frekvenciatartománybeli eloszlásokat adják;

— $F(t, \omega)$ legyen pozitív, azaz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t,\omega)\,\mathrm{d}\omega = |x(t)|^2 \tag{2-1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t,\omega)\,\mathrm{d}t = |X(\omega)|^2 \tag{2-2}$$

$$F(t,\omega) > 0 \quad \forall t,\ \forall \omega \tag{2-3}$$

minden $x(t)$ realizációra. Kimutatható ([3], [4], [5]), hogy a (2—1) és a (2—2) feltételeket kielégítő legáltalánosabb kifejezés

$$F(t,\omega) = \tag{2-4}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\xi t+\tau\omega-\xi u)}\, \Phi(\xi, \tau)\, x(u+\tau/2) \cdot$$

$$\cdot\, x^*(u-\tau/2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi t+\tau\omega-\tau u)}\, \Phi(\xi,\tau) X(u+\xi/2) \cdot$$

$$\cdot\, X^*(u-\xi/2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi$$

alakú, ahol $\Phi(\xi, \tau)$ tetszőleges magfüggvény, amelyre érvényesek a

$$\Phi(0, \tau) = 1 \quad \text{és} \quad \Phi(\xi, 0) = 1 \tag{2-5}$$

összefüggések. A Φ magfüggvény konkrét alakjai különböző $F(t, \omega)$ eloszlásosztályokat határoznak meg.

Ezért a továbbiakban az $F(t, \omega)$ jelölés helyett az $F(t, \omega, \Phi)$ jelölést alkalmazzuk.

Tetszőleges $F(t, \omega, \Phi)$ eloszlásfüggvényhez mindig található magfüggvény a következő kifejezés felhasználásával ([5]):

(2-6) $$\Phi(\xi,\tau)=\frac{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(t,\omega,\Phi)\,e^{jt(\xi+\omega)}\,dt\,d\xi}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^*(u-\tau/2)\,x^*(u+\tau/2)\,e^{j\xi u}\,du}$$

A különböző magfüggvényekkel definiált eloszlások közti kapcsolatot megadó összefüggés ([5]):

(2-7)

$$F_2(t,\omega,\Phi_2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi_2(\xi,\tau)}{\Phi_1(\xi,\tau)}\cdot$$
$$\cdot e^{j\xi(t-t')+j\tau(\omega-\omega')}\,F_1(t',\omega',\Phi_1)\,d\xi\,d\tau\,d\tau'\,dt'\,d\omega'$$

A továbbiakban a (2—4) összefüggéssel definiált eloszlásokkal szemben a jelelmélet szempontjából támasztott néhány követelményt veszünk sorra. Az egyes tulajdonságok rendszerint a magra vonatkozó megkötésekkel járnak együtt ([1]).

Az első két tulajdonság szerint a jelben bekövetkező idő- vagy frekvenciaeltolás az eloszlás idő- vagy frekvenciabeli eltolására vezet:

(2-8) $$x(t)\to F(t,\omega,\Phi)\qquad x(t-t_0)\to F(t-t_0,\omega,\Phi)$$
$$e^{j\omega_0 t}x(t)\to F(t,\omega-\omega_0,\Phi)$$

A szükséges korlátozások: a Φ mag idő-, ill. frekvenciafüggetlen.

A következő két tulajdonságot a (2—1) és (2—2) összefüggések definiálják. (2—1) alapján a frekvencia szerint integrálva adott időpillanatban a pillanatnyi teljesítmény adódik, míg az idő szerinti integrálás eredménye az energiasűrűség spektrum adott frekvencián. Következésképp a teljes (t, ω) síkon vett integrál adja a teljes jelenergiát.

Célszerű, ha a kapott eloszlás valós:

(2-9) $$F(t,\omega,\Phi)=F^*(t,\omega,\Phi)$$

A magfüggvényre vonatkozó korlátozás: $\Phi(\xi, \tau)= =\Phi^*(-\xi, -\tau)$

$F(t, \omega, \Phi)$ energiaeloszlásként vagy energiasűrűségfüggvényként való értelmezéséhez szükség van a (2—3) összefüggés fennállására (a kapott eloszlás t és ω minden szóbajöhető értékére pozitív legyen). A peremeloszlásokat is kielégítő, ún. pozitív eloszlásfüggvények alakja [6] szerint:

(2-10) $$F(t,\omega,\Phi)=$$
$$=|x(t)|^2\,|X(\omega)|^2\{1+c\varrho(z(t),y(\omega))\},$$

ahol

(2-11) $$\varrho(z,y)=h(z,y)-h_1(z)-h_2(y)+1$$
$$z(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}|x(t')|^2dt'\qquad y(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\omega}|X(\omega)|^2d\omega$$

$h(z, y)$ a z és y változók egységnégyzetben ($0\leq z, y\leq 1$) tetszőleges pozitív függvénye, továbbá „1” értékre normalizált. $h_1(z)$ és $h_2(y)$ a $h(z, y)$ függvényből származtathatók:

(2-12) $$h_1(z)=\int\limits_0^1 h(z,y)\,dy\qquad h_2(y)=\int\limits_0^1 h(z,y)\,dz$$

c numerikus állandó, amelyre teljesül:

(2-13) $$-1/k_2\leq c\leq 1/k_1,$$

ahol $-k_1$ és k_2 a $\varrho(z, y)$ abszolút minimuma és maximuma. A c állandóra vonatkozó feltétel biztosítja a pozitivitást. Kimutatható ([6]), hogy a fenti (2—10) kifejezés leírja a (2—1)—(2—3) feltételeknek eleget tevő összes pozitív függvényt. h lehet az $x(t)$ jel valamely funkcionálja is.

Ugyanakkor vannak olyan, a jelelméletben igen jól használható tulajdonságok, amelyek fontosabbak lehetnek a pozitivitási tulajdonságnál, de azzal kölcsönösen kizárják egymást. Azonban ezen esetekben is a (t, ω) síknak a Heisenberg-féle relációval összhangban levő darabjára vett eloszlásátlaga már pozitív lehet, azaz a lokálisan negatív értékek nem zavaróak ([2]).

A következő két tulajdonság az átlagos és a pillanatnyi frekvencia, ill. az átlagos idő és a csoportfutási idő közti összefüggéssel kapcsolatos:

(2-14)

$$\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega F(t,\omega,\Phi)\,d\omega}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(t,\omega,\Phi)\,d\omega}=\Omega_x(t)=\operatorname{Im}\frac{d}{dt}\ln x(t)$$

(2-15)

$$\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}tFt,\ Idt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(t,\omega,\Phi)\,dt}=T_x(\omega)=-\operatorname{Im}\frac{d}{d\omega}\ln X(\omega)$$

Eszerint az F eloszlás $\Omega_x(t)$ átlagos frekvenciája egy adott időpillanatban megegyezik a jel pillanatnyi frekvenciájával, ill. az eloszlás $T_x(\omega)$ átlagos ideje adott frekvencián megegyezik a jelspektrum fázisának negatív deriváltjával. Ha az $x(t)$ jel lineáris, időinvariáns rendszer súlyfüggvénye, akkor az $X(\omega)$ spektrum a rendszer átviteli függvénye, s a fázis negatív deriváltja a csoportfutási idő. Ekkor (2—15) jelentése: lineáris rendszer súlyfüggvényéhez rendelt F eloszlás átlagos ideje megegyezik a lineáris rendszer csoportfutási idejével. A maggfüggvényre teendő megkötések:

(2-16) $$\left.\frac{\partial}{\partial\tau}\Phi(\xi,\tau)\right|_{\tau=0}=0\qquad \Phi(\xi,0)=1\ \forall\xi$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial\xi}\Phi(\xi,\tau)\right|_{\xi=0}=0\qquad \Phi(0,\tau)=1\ \forall\tau$$

Végül következnek az idő-, ill. frekvenciatartománybeli véges kiterjedéssel kapcsolatos tulajdonságok:

(2-17) ha $x(t)=0\ \ |t|>T,$ akkor $F(t,\omega,\Phi)=0$

$|t|>T.$

Ennek feltétele, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\xi t}\Phi(\xi,\tau)\,d\xi=0 \quad |\tau|<2|t| \tag{2-18}$$

A frekvenciatartománybeli véges kiterjedés:

(2-19) ha $X(\omega)=0\ \ |\omega|>\omega_0,$ akkor $F(t,\omega,\Phi)=0$

$|\omega|>\omega_0.$

A szükséges korlátozás:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}\Phi(\xi,\tau)\,d\tau=0 \quad |\xi|<2|\omega| \tag{2-20}$$

A (2—17) és (2—19) tulajdonságok inkompatibilisek a pozitivitási tulajdonsággal. Tekintsünk pl. egy kauzális jelet. Ekkor (2—17) szerint F is eltűnik a $t<0$ értékekre. Ha F sehol sem negatív, akkor a (2—15) szerint a jelspektrum fázisának negatív deriváltja sem lesz negatív egyetlen frekvencián sem. Ez viszont ellentmond annak az ismert ténynek, hogy kauzális jelek negatív csoportfutási idejűek lehetnek bizonyos frekvenciákon. Hasonlóan mutatható ki, hogy a (2—14) és (2—19) ellentmondanak egymásnak nem negatív F eloszlások esetén.

Az együttes idő-frekvenciaeloszlásnak egyelőre nem adtunk fizikai értelmezést. A továbbiakban néhány ismert eloszlást származtatunk az általános F eloszlásfüggvényből.

3. Együttes idő-frekvenciatartománybeli leírások

Az ismert együttes leírások a (2—4) összefüggéssel származtathatók a $\Phi(\xi,\tau)$ magfüggvény ismeretében. Néhány fontosabb eloszlás és a hozzátartozó magfüggvények:

a) Wigner-eloszlás

$$\Phi(\xi,\tau)=1\ \forall\xi,\forall\tau$$

$$W_x(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}x(t+\tau/2)\,x^*(t-\tau/2)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\xi t}X(\omega+\xi/2)X^*(\omega-\xi/2)\,d\xi$$

b) Kétértelműségi függvény

$$\Phi(\xi,\tau)=2\pi\delta(\tau-t)\delta(\xi-\omega)$$

$$A(\xi,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\xi t}x(t+\tau/2)\,x^*(t-\tau/2)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau}X(\omega+\xi/2)X^*(\omega-\xi/2)\,d\omega$$

c) Rihaczek-féle függvény

$\Phi(\xi,\tau)=e^{j\alpha\xi\tau}$ $\alpha=0{,}5$ választással

$$F(t,\omega,\Phi_{0,5})=x^*(t)X(\omega)\,e^{j\omega\tau}$$

d) Spektrogramm

Legyen $x(t)$ a jel, amely spektrogrammját keressük és $h(\tau)$ egy ablakfüggvény. Az ablakolással kapott jel:

$$x_t(\tau)=x(\tau)h(\tau-t). \tag{3-1}$$

A t időpillanat jelöli ki az ablaknak az időtengelyen elfoglalt helyét. A spektrogrammot meghatározó magfüggvény:

$$\Phi(\xi,\tau)=A_h(-\xi,\tau)$$

azaz az ablak b. pont szerint definiált kétértelműségi függvénye. A spektrogramm:

$$S(t,\omega)=\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau\right|^2$$

4. Összefoglalás

Jelek általánosított, idő- és frekvenciatartománybeli egyidejű leírásának egy lehetősége integráltranszformáció eredményeképp adódó kétváltozós függvény (eloszlás) alkalmazása. A transzformációs összefüggés igen általános megkötések (2—1)—(2—3) alapján származtatható. A transzformáció típusát és tulajdonságait az integráltranszformáció magfüggvénye határozza meg. A magra tett megkötések függvényében az együttes leírás különböző tulajdonságai írhatók elő (eltolásokra vonatkozó összefüggés, az átlagos és a pillanatnyi frekvencia, ill. átlagos idő és a fázis deriváltjának negatívja közti kapcsolat stb.). Szó volt néhány ismertebb együttes leírásának az általános összefüggésből adott magfüggvénnyel történő származtatásáról is.

Köszönetnyilvánítás

A dolgozat a BME—HEI-ben készült, és szervesen kapcsolódik a Távközlési Kutató Intézetben folyó kutató-fejlesztő munkához ([8]). Létrejöttéhez mindkét intézet jelentős támogatást nyújtott. Külön köszönet illeti dr. Simonyi Ernő tud. főosztályvezetőt (TKI) a probléma felvetéséért.

IRODALOM

[1] *Claasen, T. A. C. M.—Mecklenbräuker, W. F. G.*: "The Wigner Distribution — a Tool for Time-Frequency Signal Analysis" I—II—III. Philips J. of Research, vol. 35, 1980

[2] *Claasen, T. A. C. M.—Mecklenbräuker, W. F. G.*: "On the Time-Frequency Discrimination of Energy Distributions: Can They Look Sharper than Heisenberg?" ICASSP' 84, San Diego

[3] *Cohen, L.*: "Generalized Phase-Space Distribution Functions", Journal of Mathematical Physics, vol. 7, no. 5, 1966. máj.

[4] *Cohen, L.*: "Quantization Problem and Variational Principle in the Phase-Space Formulation of Quantum Mechanics", Journal of Mathematical Physics, vol. 17, no. 10, 1976. okt.

[5] *Cohen, L.*: "Distributions in Signal Theory" ICASSP' 84, San Diego

[6] *Cohen, L.—Posch, T. E.*: "Positive Time-Frequency Distribution Functions", ASSP—33, vol. 33, no. 1, 1985. febr.

[7] *Gordos G.—Takács Gy.*: „Digitális beszédfeldolgozás", Műszaki Könyvkiadó, 1983.

[8] *Kocsis F.—Solymosi J.*: „Jelek egyidejű idő- és frekvenciatartománybeli leírásának egy lehetősége: a Wigner-eloszlás", TKI—BME HEI tanulmány, 1985. ápr.

[9] *Simonyi E.*: „Digitális szűrők", Műszaki Könyvkiadó, 1984.