



# HÍRADÁSTECHNIKA

A HÍRADÁSTECHNIKAI TUDOMÁNYOS EGYESÜLET

FOLYÓIRATA

XLI. évfolyam

BUDAPEST

1990

9-10

# HÍRADÁSTECHNIKA

## A HÍRADÁSTECHNIKAI TUDOMÁNYOS EGYESÜLET FOLYÓIRATA

XLI. évfolyam, 1990. 9-10. szám

Felelős szerkesztő:

DR. TÓFALVI GYULA

Szerkeszti a szerkesztőbizottság

A szerkesztőbizottság elnöke:

HORVÁTH IMRE

Szerkesztők:

ANGYAL LÁSZLÓ

DR. FLESCHE ISTVÁN

MÉREY IMRÉNÉ

SZÖLLŐSI GYÖRGYNÉ

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:

HTE

Rovatvezető: Mérey Imréné

Gál Ferenc

Dr. Frónay Gábor

BHG

Rovatvezető: Angyal László

Tudományos szerkesztő: Dr. Frajka Béla,

Ágostházi Margit, Bernhard Richárd,

Fazekas László, Dr. Kerpán István,

Klug Miklós, Laczkó Endre, Sztaiics Ákos

MEV

Rovatvezető: Kászonyi László

Tudományos szerkesztő: Dr. Kormány Teréz,

Balogh Albert, Csornai László,

Czermann Mihály, Hidas György,

Huszka Zoltán, Dr. Ligeti Róbertné,

Dr. Mátrai Géza, Dr. Motál György,

Schödl Ervin

ORION

Rovatvezető: Dr. Somogyi András

Tudományos szerkesztő: Dr. Frigyes István

Denk Attila, Froemel Károly,

Nóvik Lajos, Pethes István

REMIX

Rovatvezető: Rippel Géza

Tudományos szerkesztő: Dr. Kormány Teréz,

Horváth Lajos, Mészáros Sándor,

Papp Károly, Sugár Béla,

Dr. Udvarhelyi Gábor, Dr. Vértessy Miklós

TKI

Rovatvezető: Dr. Baranyi András

Tudományos szerkesztő: Dr. Lajtha György,

Dr. Henk Tamás, Dr. Kása István,

Megyesi Csaba, Dr. Sárkány Tamás,

Dr. Simonyi Ernő

TERTA

Rovatvezető: Szalay Tibor

Tudományos szerkesztő: Dr. Gordos Géza,

Keller János, Márik Zoltán,

Porpáczy Elemér, Schnürmacher Tamás,

Török László, Veress Péter

Szerkesztőségi ügyekben és kéziratokkal  
kapcsolatban felvilágosítást ad: Szöllősi  
Györgyné. Telefon: 149-5098

# BHG ORION TERTA MŰSZAKI KÖZLEMÉNYEK

XXXVI. évfolyam, 1990. 9-10. szám

## ROVATOK

Egyesületi élet  
Rendszertechnika  
Kapcsolástechnika  
Vezetékes technika  
Fénytvádközlés  
Vezeték nélküli technika  
Adástechnika  
Vételtechnika  
Mikroelektronika  
Alkatrésztechnika  
Hálózatelmélet  
Elektromágneses problémák

## ROVATGAZDÁK

HTE (H)  
TKI (□)  
BHG (#)  
TERTA (+)  
ORION (\*)  
MEV (†)  
REMIX (Δ)

## ROVATTÁRSÁK

BEAG HTV  
BME KONAKTA  
BRG KÓPORC  
EMO KFKI  
El. szöv. M. Posta  
FMV ML  
GAMMA MM  
HTSZ MFKI  
HAGY TUNGSRAM

## TARTALOM

<i>BIRÓ VIKTOR</i> : Mikróhullámú tranzistoros kiszajú erősítők tervezésé- nek néhány kérdése .....	225
ISHM-Hungary .....	233
<i>DR. BALOGH ALBERT</i> : A megbízhatóság és a felhasználó költsége .....	234
Nívódíjaink .....	244
<i>CEBE LÁSZLÓ</i> : A két- és többdimenziós Fourier sor és Fourier integrál (I. rész) .....	246
Tartalmi összefoglalások.....	255

Készült: a POLYGON nyomdában.

Felelős vezető: Surman József

1134. Budapest, Lehel u. 4/e

# Mikrohullámú tranzisztoros kiszajú erősítők tervezésének néhány kérdése

BIRÓ VIKTOR

Finommechanikai Vállalat

## Összefoglalás

Mellőzve a fokozatok közti illesztés szokásos feltételezését a közlemény több láncba kapcsolt tranzisztort tartalmazó u.n. közvetlen csatolású (a fokozatok közti 50 ohm-ra való illesztés nélküli) erősítő zajtényezőjének meghatározásával, valamint a tranzisztorok egyenkénti párhuzamos visszacsatolásának a tranzisztor zajtényezőjére való hatásával foglalkozik.

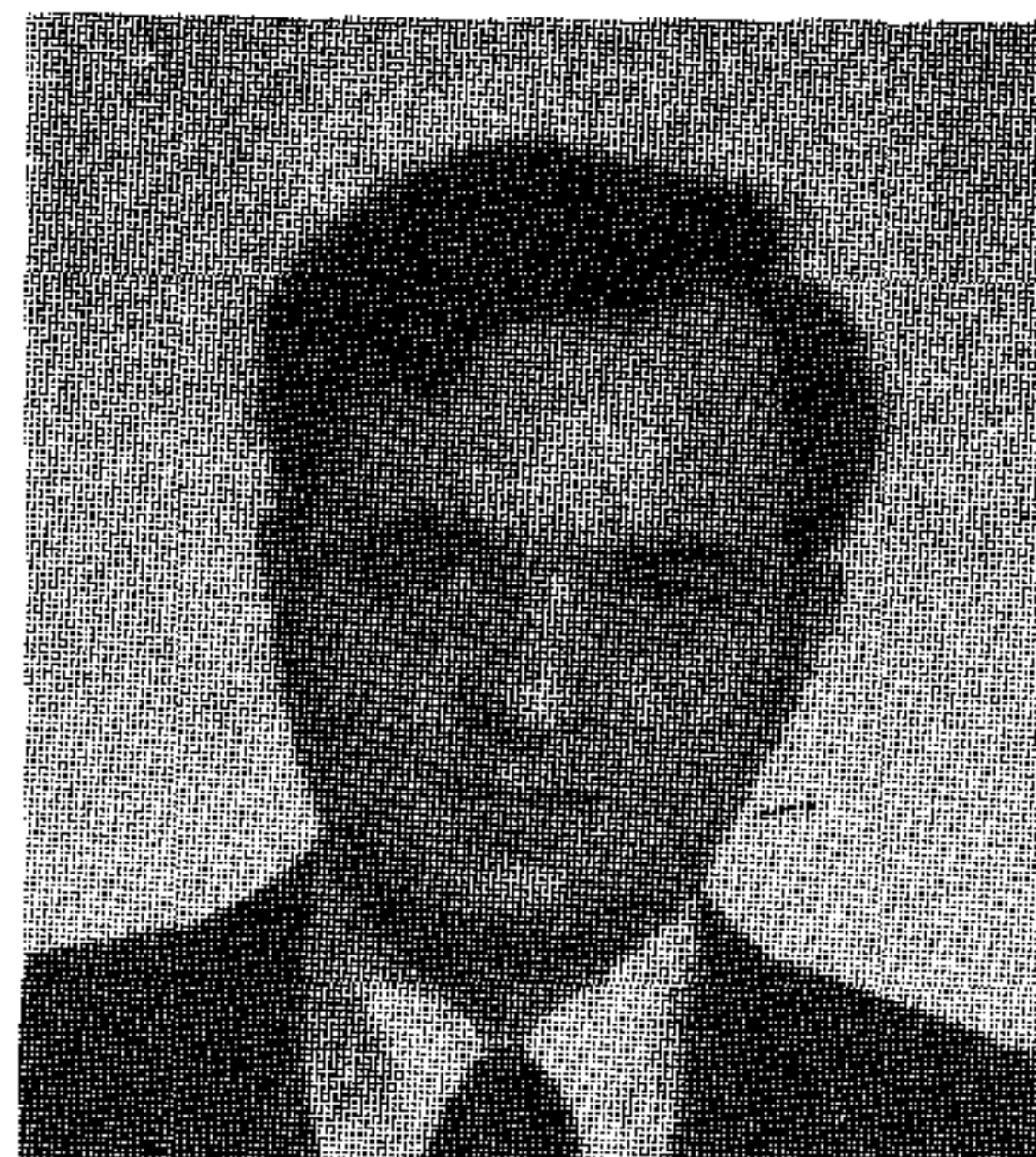
Az elméleti összefüggések meghatározása után a cikkben találhatóak a fenti összefüggéseket illusztráló számítási eredmények, melyeket a szerző által kifejlesztett IBM PC/AT gépekre készített program segítségével lehet nyerni. A számítási eredmények arra engednek következtetni, hogy a tranzisztorként alkalmazott rezonáns visszacsatolás lényegesen javíthatja az erősítők egyes paramétereit anélkül, hogy a zajtényező romlása számottevő legyen.

## Bevezetés

Kiszajú mikrohullámú tranzisztoros erősítők tervezése és kifejlesztése sokrétű, igen összetett feladat, melynek egy cikkben történő ismertetése lehetetlen. Ezért az alábbiakban csak a passzív illesztő áramkörök elvi tervezésével foglalkozunk, különös tekintettel az erősítő zajtényezőjére. Megvizsgáljuk továbbá a gyakorlatban nagyon gyakran alkalmazott parallel visszacsatolás hatását a tranzisztor zajparamétereire, ami az erősítő zajtényezőjét is lényegesen befolyásolja.

A vizsgálatainkat  $S$  - mátrix segítségével végezzük, feltételezve, hogy az olvasó előtt ezen mátrix leírás ismert. A tranzisztor zajparamétereit az ismert (pl. [1])  $R_n$ ,  $F_{min}$ ,  $\Gamma_m$  formában használjuk, ahol  $R_n$  -ellenállás dimenziójú mennyiség,  $F_{min}$  -a tranzisztor minimális zajtényezője,  $\Gamma_m$  -azon meghajtó generátor reflexió tényezője (általában 50 ohm-ra van normalizálva) mely mellett a tranzisztor zajtényezője  $F_m$  -mel egyenlő.

Ezen cikkben érintett kérdések gyakorlati jelentőségük miatt a szakirodalomban is elterjedten szerepelnek, bár egy kissé más formában tárgyalva. Az olvasó tájékozódása érdekében az irodalmi jegyzék tartalmazza azon publikációk felsorolását, melyek az itt tárgyalt témához szorosabban kapcsolódnak.



BIRÓ VIKTOR

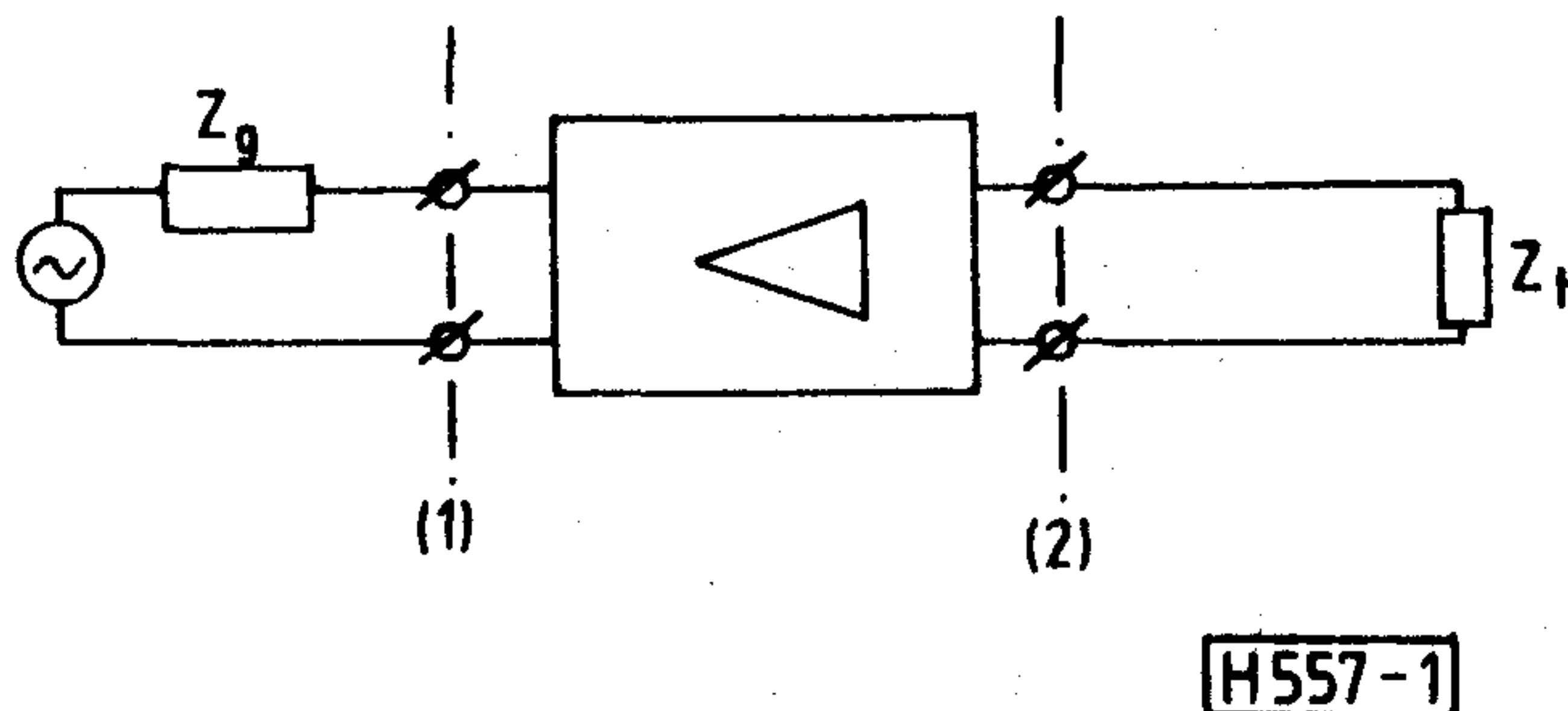
1952-ben végezte el a BME villamosmérnöki karát. 1961-ig a Finommechanikai Vállalatnál, mikrohullámú technika terén dolgozott.

1961-ben szerezte meg a műszaki kandidátusi tudományos fokozatot a ferritek mikrohullámú alkalmazása témában.

1972-ig a TKI-ban dolgozott, ahol elsősorban a varaktoros frekvenciasokszorozók fejlesztésével foglalkozott. 1975-ben e témában szerezte meg a műszaki tudományok doktora tudományos fokozatot.

1985-ben jelent meg „Non-linear oscillations in feedback systems” című könyve.

Jelenleg a Finommechanikai Vállalatnál dolgozik.



1. ábra. Az erősítő általános blokkvázlata

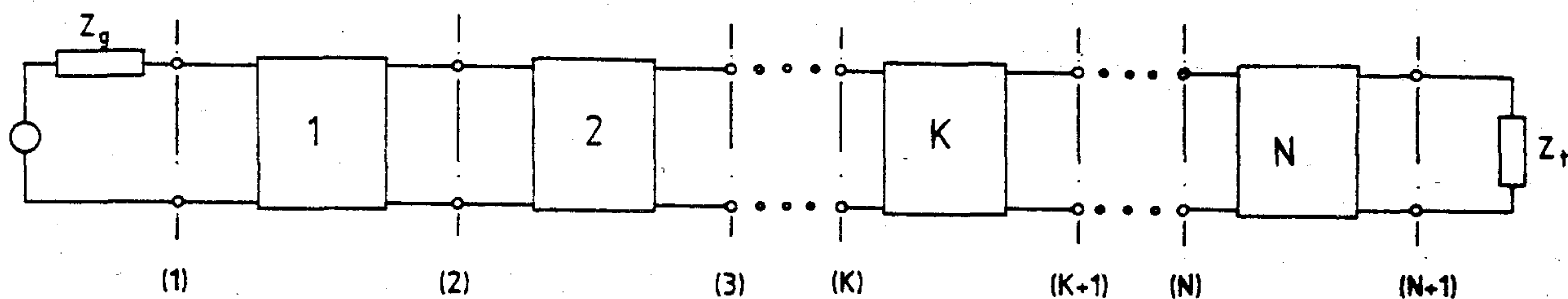
## 1. Láncba kapcsolt erősítők zajtényezője

Az egyértelműség kedvéért rögzítsük le az alábbi ismert definíciókat, figyelembe véve az 1. ábrán levő erősítő elrendezést.  $G$  - az átviteli erősítést az alábbi (1.1) kifejezés definiálja

$$G = \frac{P_2}{P_a}; \quad (1.1)$$

ahol  $P_2$  -a  $Z_l$  - impedancián disszipálódó teljesítmény,  $P_a$  - a meghajtó generátorból kivehető maximális teljesítmény.  $G_p$  - a teljesítményerősítést az (1.2) kifejezés definiálja.

$$G_p = \frac{P_2}{P_1}; \quad (1.2)$$



2. ábra.  $N$ -fokozatú erősítő általános blokkvázlata

H557-2

ahol  $P_1$  az (1)-kapocstól jobbra disszipálódó teljesítmény.  $F$  – az erősítő zajtényezőjét az (1.3) kifejezés definiálja

$$F = \frac{N_o}{N_a G}; \quad (1.3)$$

ahol  $N_o$  – a  $Z_t$ -impadencián disszipálódó zajteljesítmény,  $N_a$  – a meghajtó generátorból kivethető maximális zajteljesítmény. Mint ismeretes  $N_a = kT_o B$  ahol  $k$  – Boltzmann féle állandó,  $T_o = 290^\circ K$ ,  $B$  – az erősítő ekvalens sávszélessége.

A fenti mennyiségek birtokában állapítsuk meg az  $N$  – láncha kapcsolt erősítő eredő zajtényezőjét figyelembe véve a 2. ábrán levő elrendezést. Egy „zajos” erősítő kimenetén megjelenő zajteljesítményt két összetevőből állónak tekintjük:

- a meghajtó generátorból eredő felerősített zajteljesítmény, mely  $N_a G$ -vel egyenlő és
- a „zajos” erősítőtől eredő zajteljesítmény, mely  $(F-1) N_a G$ -vel egyenlő.

A fentieket figyelembe véve a 2. ábrán levő  $Z_t$  impadencián disszipálódó  $N_{oe}$ -zajtéljesítmény az alábbi

$$N_{oe} = F_1 N_a G_1 \cdot G_{p2} G_{p3} \dots G_{pN} + (F_2 - 1) N_a G_2 G_{p3} G_{p4} \dots G_{pN} + \dots + (F_K - 1) N_a G_K G_{p,K+1} \dots G_{pN} + \dots + (F_N - 1) N_a G_N;$$

Az eredő erősítő átviteli erősítése  $G_e$  az alábbi

$$G_e = G_1 G_{p2} G_{p3} \dots G_{pN}$$

Bevezetve  $G_{1,K}$  az első  $K$  – erősítő fokozat eredő átviteli erősítését,

$$G_{1,K} = G_1 G_{p2} G_{p3} \dots G_{pK}; \quad (1.4)$$

felhasználva (1.3) kifejezést kapjuk  $F_e$  az  $N$  – erősítő fokozatból álló eredő erősítő zajtényezőjét

$$F_e = F_1 + (F_2 - 1) \frac{G_2}{G_{1,2}} + (F_3 - 1) \frac{G_3}{G_{1,3}} + \dots + (F_k - 1) \frac{G_k}{G_{1,k}} + \dots + (F_N - 1) \frac{G_N}{G_{1,N}}; \quad (1.5)$$

Megjegyzendő, hogy (1.5) kifejezés alapvetően különbözik a leggyakrabban használt

$$F_e = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \dots + \frac{F_k - 1}{G_1 G_2 \dots G_{K-1}} + \dots + \frac{F_N - 1}{G_1 G_2 \dots G_N};$$

kifejezéstől, melyet  $G_i = G_{pi}$  feltételezésével kapjuk (1.5) kifejezésből, amikor is feltételezzük, hogy az erősítő fokozatok egymáshoz illesztettek.

Az (1.5) formula használatához szükséges kiszámolni

$F_k$  és  $\frac{G_k}{G_{1,k}}$  értékeket. Ismeretes (pl. [1]), hogy

$$F_k = F_{k \min} + 4 \frac{R_{nk}}{R_0} \frac{|\Gamma_k - \Gamma_{mk}|^2}{|1 + \Gamma_{mk}|^2 (1 - |\Gamma_k|^2)}; \quad (1.6)$$

ahol  $F_{k \min}$  –  $K$ -ik tranzisztor lehetséges minimális zajtényezője,  $\Gamma_{mk}$   $K$ -ik tranzisztor meghajtó generátor azon reflexiós tényezője, amely mellett a zajtényezője  $F_{k \min}$ -mal egyenlő. Továbbá

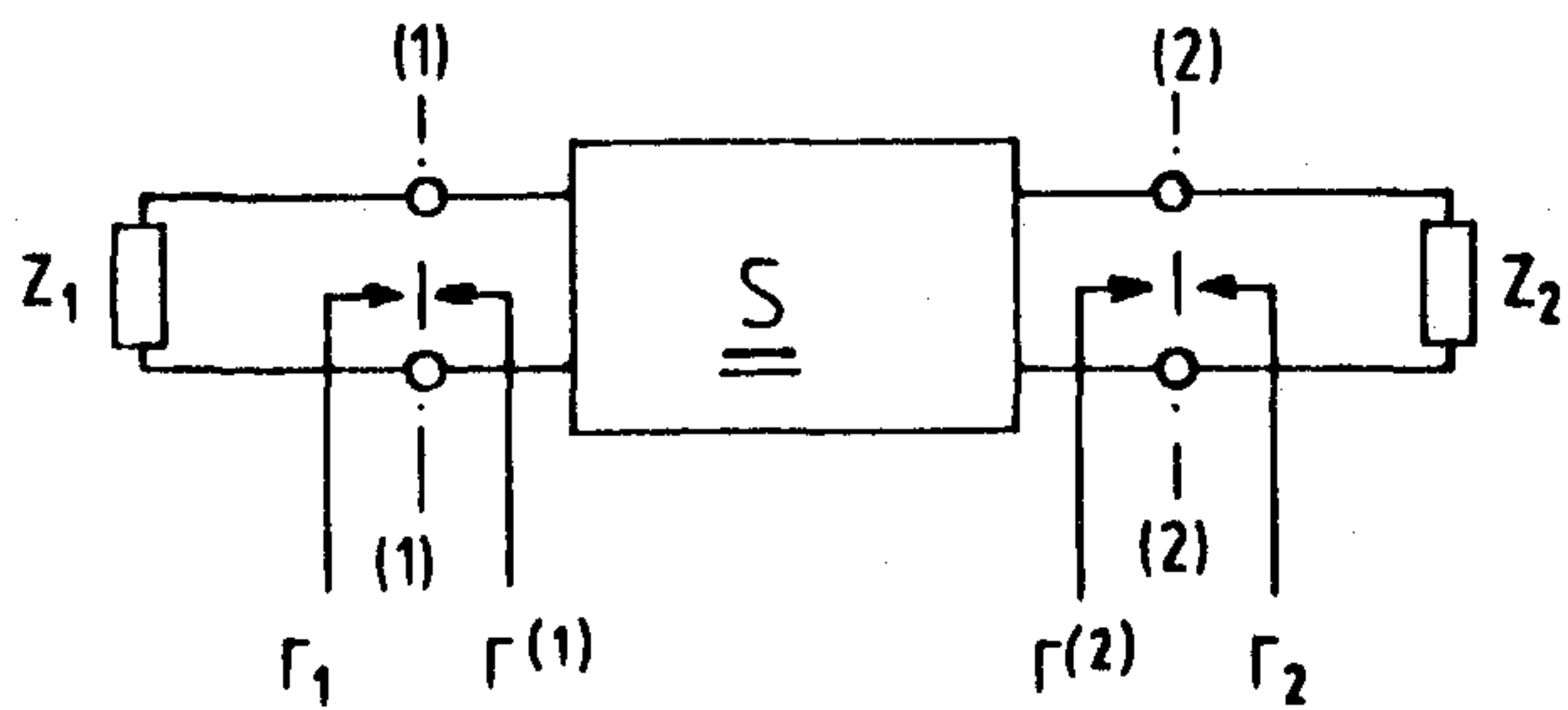
$$\Gamma_k = \frac{Z_k - R_0}{Z_k + R_0} \quad (1.7)$$

ahol  $Z_k$  – azon impadencia, amelyik megfelel  $\Gamma_k$  – reflexiós tényezőnek,  $R_{nk}$  – egy az adott tranzisztorra jellemző ellenállás dimenziójú mennyiség a  $K$ -ik tranzisztorra vonatkozólag.

A  $\Gamma_k$  reflexiós tényező meghatározásának egyértelművé tételéhez tekintsük meg 3. ábrát, ahol  $\Gamma^{(1)}$  és  $\Gamma^{(2)}$  a  $Z_1$ , illetve  $Z_2$  impadenciáknak megfelelő  $R_0$ -ra normalizált (1.7) által meghatározott reflexiós tényezők. Ismeretes ([1],[2]), hogy

$$\Gamma_1 = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma^{(2)}}{1 - S_{22} \Gamma^{(2)}}; \quad (1.8)$$

$$\Gamma_2 = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma^{(1)}}{1 - S_{11} \Gamma^{(1)}};$$



H557-3

3. ábra. Az erősítő reflexiós együtthatóinak definíciója

ahol  $S_{ik}$  – a 3. ábrán lévő négypólus  $S$  -mátrixának  $R_0$ -ra normalizált elemei.

A vizsgált erősítő elrendezést a 4. ábra mutatja. A páros számú négypólusok a tranzisztorok („ $l$ ”-edik tranzisztor „ $2l$ ”-edik négypólus). A páratlan négypólusok passzív, lineáris, reaktans illesztő hálózatokat jelölik. Egy erősítő fokozatot egy tranzisztor és a tranzisztort megelőző illesztő hálózat képezi.

$\Gamma_i^{(b)}$ -vel jelölt reflexiós tényező a generátor felőli reflexiós tényezőt jelenti az „ $i$ ”-edik kapcspon,  $\Gamma_i$ -vel jelölt reflexiós tényező pedig a terhelés felőli reflexiós tényezőt jelenti, ahol

$$i = 1, 2, 3, \dots, 2(N+1);$$

A fentieknek megfelelően a „ $K$ ”-ik erősítő  $F_k$  zajtényezőjét az alábbi (1.6)-nak megfelelő kifejezés határozza

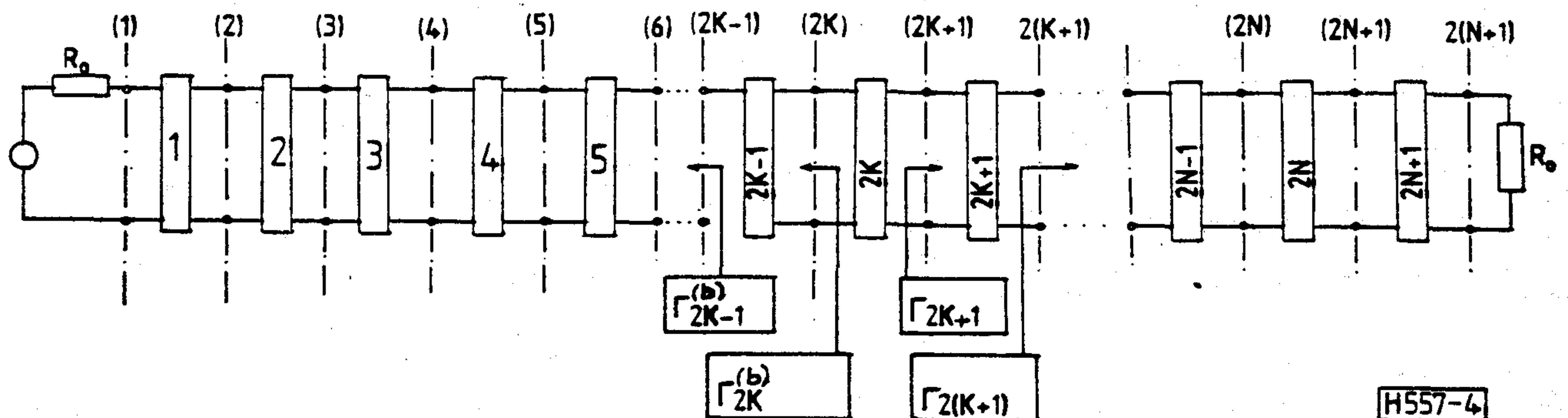
$$F_k = F_{k \min} + 4 \frac{R_{nk}}{R_0} \frac{|\Gamma_{2k}^{(b)} - \Gamma_{mk}|^2}{|1 + \Gamma_{mk}|^2 (1 - |\Gamma_{2k}^{(b)}|^2)}; \quad (1.9)$$

ahol (1.8)-nak megfelelően

$$\Gamma_{2k}^{(b)} = S_{22}^{(2k-1)} + \frac{S_{12}^{(2k-1)} S_{21}^{(2k-1)} \Gamma_{2k-1}^{(b)}}{1 - S_{11}^{(2k-1)} \Gamma_{2k-1}^{(b)}}; \quad (1.10)$$

$$\Gamma_1^{(b)} = 0; \quad k = 1, 2, 3, \dots, N;$$

$S_{ij}^{(2K-1)}$  a „ $2K-1$ ”-ik négypólus szórásmatrixának „ $ij$ ”-edik eleme.



H557-4

4. ábra.  $N$ -fokozatú erősítő részletes blokkvázlata

Az (1.9) és (1.10) formulák alkalmazását az teszi lehetővé, hogy be lehet bizonyítani:  $(2K-1)$  és  $(2K+1)$  kapcsok közti aktív lineáris négypólus zajtényezője azonos a  $(2K)$  és  $(2K+1)$  kapcsok közt bekapcsolt tranzisztor zajtényezőjével.

A  $K$ -adik fokozathoz  $K=1, 2, \dots, N$  tartozó tényező  $\frac{G_k}{G_{i,k}}$

meghatározásához meg kell határozni a  $(2K-1)$  és  $(2K+1)$  kapocspár közti négypólus  $S_k$  szórásmatrixát, valamint  $(1)$  és  $(2K+1)$  kapocspár közti négypólus  $S^{(1,K)}$  szórásmatrixát. Az  $S_k$  és  $S^{(1,K)}$  mátrixok meghatározásának menete a következő:

1. Az  $i$ -edik négypólus (4.ábra)  $S^{(i)}$  mátrixából

$$T_{11}^{(i)} = (-S_{11}^{(i)} S_{22}^{(i)} + S_{12}^{(i)} S_{21}^{(i)}) / S_{21}^{(i)};$$

$$T_{12}^{(i)} = S_{11}^{(i)} / S_{21}^{(i)}; \quad T_{21}^{(i)} = -S_{22}^{(i)} / S_{21}^{(i)}; \quad T_{22}^{(i)} = 1 / S_{21}^{(i)} \quad (1.11)$$

összefüggések [7] segítségével meghatározni u.n.  $T^{(i)}$  mátrixot.

2. Felhasználva szükséges  $T^{(i)}$  mátrixot kiszámítani

$$T_k = T^{(2k-1)} \cdot T^{(2k)}; \quad (1.12)$$

$$T^{(1,k)} = \prod_{i=1}^{2k} T^{(i)}; \quad (1.13)$$

mátrixokat.

$$3. \quad S_{11} = T_{12} / T_{22}; \quad S_{12} = T_{11} - \frac{T_{12} T_{21}}{T_{22}}$$

$$S_{21} = 1 / T_{22}; \quad S_{22} = -T_{21} / T_{22}; \quad (1.14)$$

összefüggések [7] segítségével  $T_k$  és  $T^{(1,K)}$  mátrixokból meghatározni a szükséges  $S_k$  és  $S^{(1,K)}$  mátrixokat.

A fentiek figyelembe vételével, mivel egy  $S$  mátrixal jellemzett aktív lineáris négypólus átviteli erősítését az alábbi ismert [1] határozza

$$G = \frac{|S_{21}|^2 \cdot (1 - |\Gamma^{(1)}|^2) \cdot (1 - |C^{(2)}|^2)}{|(1 - \Gamma^{(1)} S_{11})(1 - \Gamma^{(2)} S_{22}) - \Gamma^{(1)} \Gamma^{(2)} S_{12} S_{21}|^2}; \quad (1.15)$$

ahol  $\Gamma^{(1)}$  és  $\Gamma^{(2)}$  értelmét 3. ábra mutatja, kapjuk

$$G_k = \frac{|S_{k21}|^2 \cdot (1 - |\Gamma_{2k-1}^{(b)}|^2) \cdot (1 - |\Gamma_{2k-1}|^2)}{|(1 - \Gamma_{2k-1}^{(b)} S_{k11})(1 - \Gamma_{2k+1} S_{k22}) - \Gamma_{2k-1}^{(b)} \Gamma_{2k+1} S_{k12} S_{k21}|^2};$$

$$G_{1,k} = \frac{|S_{21}^{(1,k)}|^2 \cdot (1 - |\Gamma_{2k+1}|^2)}{|1 - \Gamma_{2k+1} S_{22}^{(1,k)}|^2}$$

(hiszen  $\Gamma_1^{(b)} = 0$ ).

Végeredményben  $K=2,3,4,\dots,N$  esetére

$$\frac{G_k}{G_{1,k}} = \frac{(1 - |\Gamma_{2k-1}^{(b)}|^2) \cdot |1 - \Gamma_{2k+1} S_{22}^{(1,k)}|^2}{|(1 - \Gamma_{2k-1}^{(b)} S_{k11})(1 - \Gamma_{2k+1} S_{k22}) - \Gamma_{2k-1}^{(b)} \Gamma_{2k+1} S_{k12} S_{k21}|^2} \cdot \frac{|S_{k21}|^2}{|S_{21}^{(1,k)}|^2} \quad (1.16)$$

ahol (1.8)-nak megfelelően

$$\Gamma_{2k-1}^{(b)} = S_{22}^{(2k-2)} + \frac{S_{12}^{(2k-2)} S_{21}^{(2k-2)} \Gamma_{2k-2}^{(b)}}{1 - S_{11}^{(2k-2)} \Gamma_{2k-2}^{(b)}}; \quad \Gamma_{2N+2} = 0;$$

$$\Gamma_{2k+1} = S_{11}^{(2k+1)} + \frac{S_{12}^{(2k+2)} S_{21}^{(2k+2)} \Gamma_{2k+2}}{1 - S_{22}^{(2k+2)} \Gamma_{2k+2}}; \quad (1.17)$$

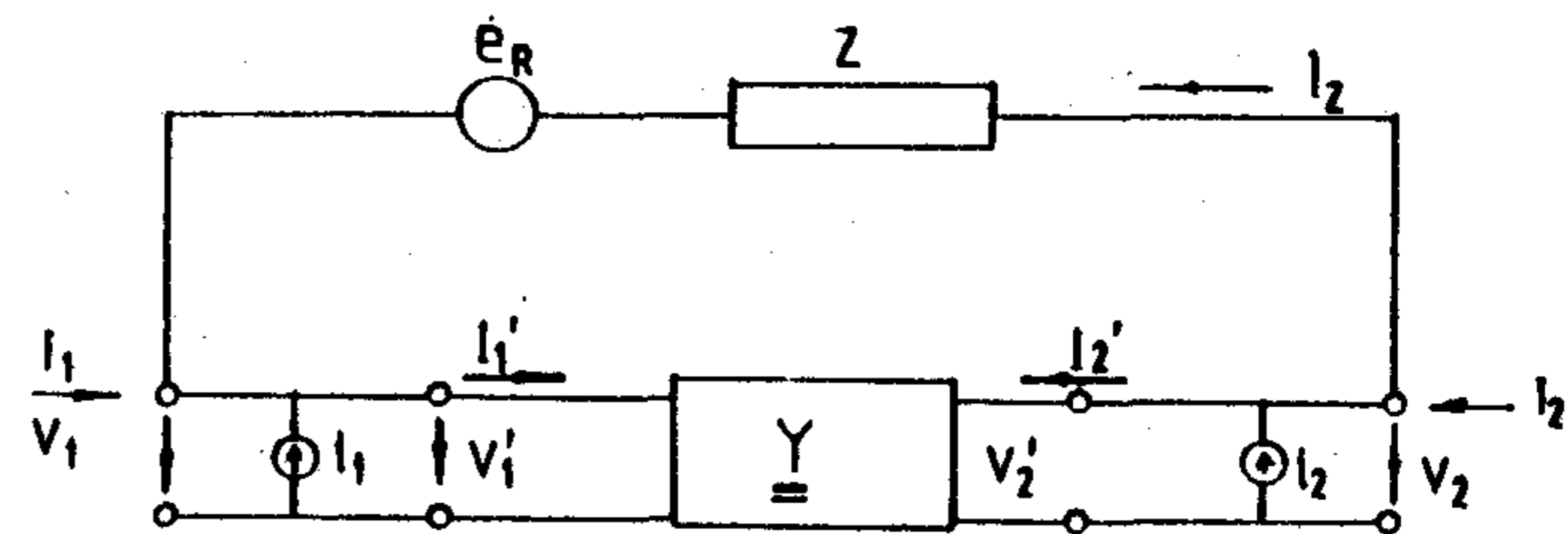
**Összefoglalva:** Az  $N$ -tranzisztoros láncba kapcsolat fokozatokból álló erősítő eredő  $F_e$  zajtényezőjét az (1.5) összefüggés határozza, melyben  $F_k$  értékeket (1.9) és

(1.10) összefüggések, a  $\frac{G_k}{G_{1,k}}$  tényezőket pedig (1.16) és (1.17) összefüggések határozzák meg.

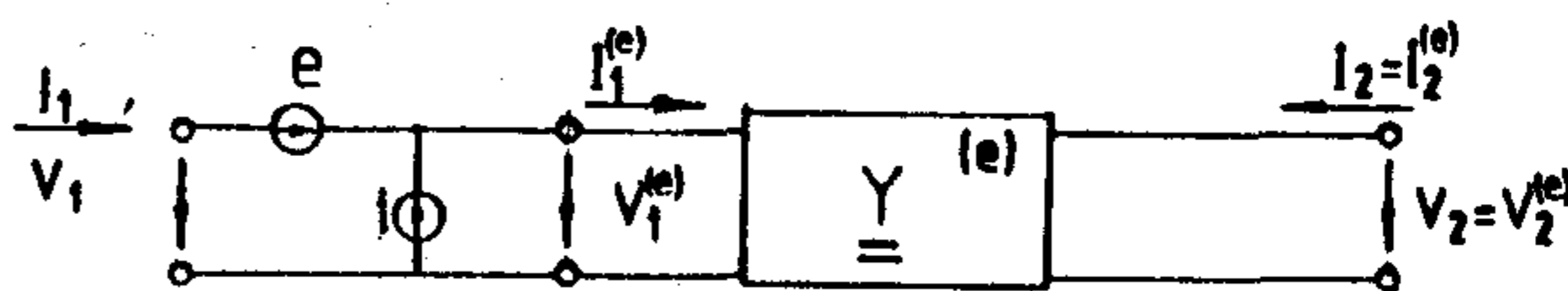
## 2. Tranzisztor zajparaméterei párhuzamos visszacsatolás esetén

A több láncba kapcsolt tranzisztoros fokozatból álló erősítő stabilitását, gerjedésmentességét a gyakorlatban azzal szokás növelni, hogy egy-egy tranzisztornál a párhuzamos visszacsatolást alkalmazzák. A visszacsatolt tranzisztor  $S$ -mátrixa és zajparaméterei megváltoznak az eredeti tranzisztorhoz képest. Az alábbiakban meghatározzuk a visszacsatolt tranzisztor eredő paramétereit.

Az aktív, lineáris, „zajos” négy-pólus zajtényezőjét az [1]-ben található módszerhez hasonlóan határozzuk meg, figyelembe véve a bemenetet kimenettel összekötő  $Z$ -impadencia ohmos részéből származó zajfeszültség generátort is. A „zajos” négy-pólust helyettesítő hálózatot az 5. ábrán láthatjuk. Az 5.a., és 5.b. ábrán levő hálózatok elektromosan ekvivalensek egymással. Az  $Y$  és  $Y^{(e)}$ -vel jelölt négy-pólusok „zajmentesek” és az admitancia mátrixai  $Y$ , ill.  $Y^{(e)}$ . Az  $i_1, i_2, i, e_R$  értékek a zajáram generátorainak rövidzárt áramait, illetve zajfeszültség generátorainak üresjárású feszültségeit jelölik.



„a”



„b”

H557-5

5. ábra. A visszacsatolt „zajos” tranzisztort helyettesítő blokkvázlat

Mint ismeretes, (pl. [1]) az (1.6) formulában szereplő  $F_{kmin}$ ,  $R_{nk}$ ,  $\Gamma_{mk}$  zajparamétereknek analóg  $F_{min}$ ,  $R_n$ ,  $\Gamma_m$  paramétereket az 5.b. ábrán levő  $e$ -zajfeszültség, illetve  $i$ -zajáram ismeretében következőképpen lehet kiszámolni.

$$K_n = \{|e|^2\} / 4k T_0 B; \quad (2.1a)$$

$$F_{min} = 1 + 2 \left[ G_c + \left( G_c^2 + \frac{G_u}{R_n} \right)^{\frac{1}{2}} \right]; \quad (2.1b)$$

$$Y_m = \left( G_c^2 + \frac{G_u}{R_n} \right)^{\frac{1}{2}} - j B_c \quad (2.1c)$$

ahol a  $G_c + jB_c = Y_c$  definíciója a következő:

$$i = i_u + Y_c e; \quad (2.2)$$

(2.2)-ben  $i_u$  áram az  $i$ -áramnak azon összetevője, amely az  $e$ -feszültséggel korrelálatlan.

$$G_u = \{|i_u|^2\} / 4k T_0 B; \quad (2.3)$$

$k$  -Boltzmann állandó,  $T_0 = 290^\circ K$ ,  $B$  -sávszélesség.

A  $\Gamma_m$  pedig az  $Y_m$ -hez tartozó  $R_o$ -ra normalizált reflexiós tényező  $\{\cdot\}$ -zárójelekkel jelöljük egy sztochasztikus változó várható értékét. Az 5. ábrán levő „zajos” lineáris, aktív négy-pólust helyettesítő ekvivalens hálózatban a „zajosság” forrását  $e_R$  zajfeszültség generátor,  $i_1$  és  $i_2$  zajáram generátorok jelentik. A függelékben található levezetés eredményeként, az 5.a. ábrán levő hálózattal ekvivalens 5.b. ábrán levő hálózat  $e$ -zajfeszültség generátor üresjárású  $e$ -feszültsége és  $i$ -zajáram generátor rövidzárt  $i$ -árama a következőképpen fejezhető ki:

$$e = i_2 \left( Y_{21} - \frac{1}{Z} \right)^{-1} + \frac{e_R}{Y_{21} Z - 1}; \quad (2.4a)$$

$$i = i_1 - i_2 \left( Y_{11} + \frac{1}{Z} \right) \left( Y_{21} - \frac{1}{Z} \right)^{-1} - e_R \frac{Y_{11} + Y_{21}}{Y_{21} \cdot Z - 1} \quad (2.4b)$$

Az 5.b. ábrán levő „zajmentes” négy pólus admittancia mátrixa az alábbi:

$$Y^{(e)} = \begin{pmatrix} Y_{11} + \frac{1}{Z} & Y_{12} - \frac{1}{Z} \\ Y_{21} - \frac{1}{Z} & Y_{22} + \frac{1}{Z} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

A visszacsatolás nélküli  $e, i$  értéket ( $|Z| = \infty$ )  $e_\infty, i_\infty$ -vel jelölve, felhasználva (2.4a) és (2.4b) összefüggéseket kapjuk

$$e = e_\infty Y_{21} \left( Y_{21} - \frac{1}{Z} \right)^{-1} + \frac{e_R}{Y_{21} \cdot Z - 1}; \quad (2.6a)$$

$$i = i_\infty + e_\infty \left[ Y_{11} - Y_{21} \left( Y_{11} + \frac{1}{Z} \right) \left( Y_{21} - \frac{1}{Z} \right)^{-1} - e_R \frac{Y_{11} + Y_{21}}{Y_{21} \cdot Z - 1} \right] \quad (2.6b)$$

Megjegyezve, hogy  $e_R$  és  $e_\infty$  feszültségek korrelálatlanok, kapjuk

$$\{e_r, e_\infty^*\} = \{e_r, i_\infty^*\} = 0; \quad (2.7)$$

ahol \* -gal komplex konjugáltat jelöljük. Ha figyelembe vesszük azt, hogy

$$i_\infty = i_{u\infty} + Y_{c\infty} e_\infty;$$

visszacsatolás nélküli tranzisztorra is fennáll (a (2.2) -vel analóg módon, továbbá

$$\begin{aligned} R_{n\infty} &= \{|e_\infty|^2\} / 4kTB; \\ \{|e_R|^2\} &= 4kTB \cdot \text{Re}\{Z\}; \\ G_{u\infty} &= i_{u\infty} / 4kTB; \end{aligned}$$

is fennállnak (2.1a), (2.3)-nak megfelelően, valamint  $\{i_u e^*\} = 0$  miatt  $\{ie^*\} = Y_c \{|e|^2\}$ ; felhasználva (2.6a), (2.6b) kifejezéseket kapjuk

$$\frac{R_n}{R_{n\infty}} = \frac{R}{R_{n\infty}} |f_4|^2 + |f_3|^2; \quad (2.8a)$$

$$Y_c = \left[ Y_{c\infty} f_3^* + \left( f_3 + f_4 \frac{R}{R_{n\infty}} \right) f_1 \right] / \left( \frac{R_n}{R_{n\infty}} \right); \quad (2.8b)$$

$$\begin{aligned} G_u &= G_{u\infty} + R_{n\infty} \left( \left| Y_{c\infty} - Y_c f_3 + f_1 \right|^2 + \right. \\ &\left. + \left| Y_c f_4 + f_1 \right|^2 \frac{R_n}{R_{n\infty}} \right); \quad (2.8c) \end{aligned}$$

$$\text{aol} \quad R = \text{Re}(Z) \quad (2.9a)$$

$$f_4 = (Y_{21} \cdot Z - 1)^{-1}; \quad (2.9b)$$

$$f_3 = Z \cdot Y_{21} \cdot f_4; \quad (2.9c)$$

$$f_1 = -(Y_{11} + Y_{21}) \cdot f_4; \quad (2.9d)$$

A visszacsatolt tranzisztor eredő  $R_n, G_u, Y_c$  zajparamétereinek meghatározásához ki kell számolni az eredeti ( $|Z| = \infty$ ) tranzisztor  $R_{n\infty}, G_{u\infty}, Y_{c\infty}$  zajparamétereit, felhasználva a tranzisztor katalógusokban megadott  $F_{\min\infty}$ -minimális zajtényező,  $\Gamma_{\min}$ -a minimális zajtényezőhöz szükséges meghajtó generátor reflexiós tényezője, valamint  $R_{n\infty}$ -értékeit. Figyelembe véve azt, hogy a katalógusban megadott  $\Gamma_{\min}$  reflexiós tényező normalizáló impedanciája 50 ohm,

$$Y_{\min} = \frac{1}{50} \frac{1 - \Gamma_{\min}}{1 + \Gamma_{\min}} \quad \text{és felhasználva} \quad (2.1b),$$

(2.1c)-vel analóg összefüggéseket kapjuk:

$$Y_{c\infty} = \frac{F_{\min\infty}}{2R_{n\infty}} G_{\min} - j B_{\min} \quad (2.10a)$$

$$G_{u\infty} = (F_{\min\infty} - 1) \left( G_{\min} - \frac{F_{\min\infty} - 1}{4R_{n\infty}} \right); \quad (2.10b)$$

ahol  $Y_{\min} = G_{\min} + j B_{\min}$

**ÖSSZEFOGLALVA:** Kiindulva a tranzisztor katalógusban megadott  $F_{\min\infty}, R_{n\infty}, \Gamma_{\min}$  zajparaméterekből, felhasználva (2.8a), (2.8b), (2.8c), valamint (2.9a), (2.9b), (2.9c), (2.9d) kifejezéseket megkapjuk (2.1b) és (2.1c) segítségével a  $Z$ -impedanciával párhuzamosan visszacsatolt tranzisztor eredő  $F_{\min}, R_n, Y_m$  zajparamétereit (természetesen  $\Gamma_m = \frac{Y_o - Y_m}{Y_o + Y_m}$ ;  $Y_o = \frac{1}{50} \text{ohm}^{-1}$ ).

A számításokhoz szükséges  $Y$  mátrixot a tranzisztor katalógusban megadott  $S$ -mátrixból ismert [7]

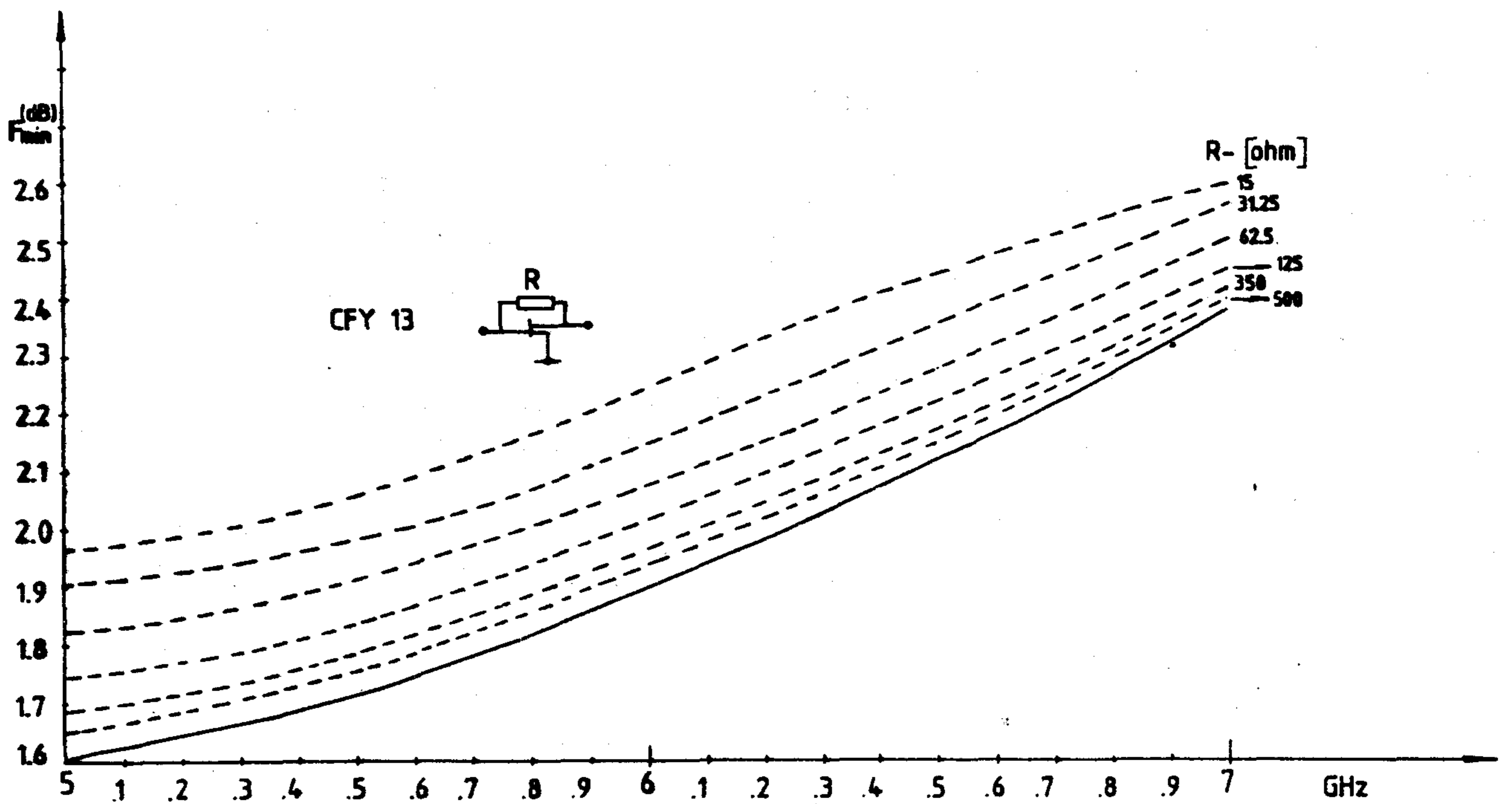
$Y = \sqrt{Y_o} (E - S) (E + S)^{-1} \sqrt{Y_o}$  összefüggés segítségével

kapjuk, ahol  $E$  egységmátrix  $Y_o = \left\langle \frac{1}{50}, \frac{1}{50} \right\rangle$

diagonál mátrix.

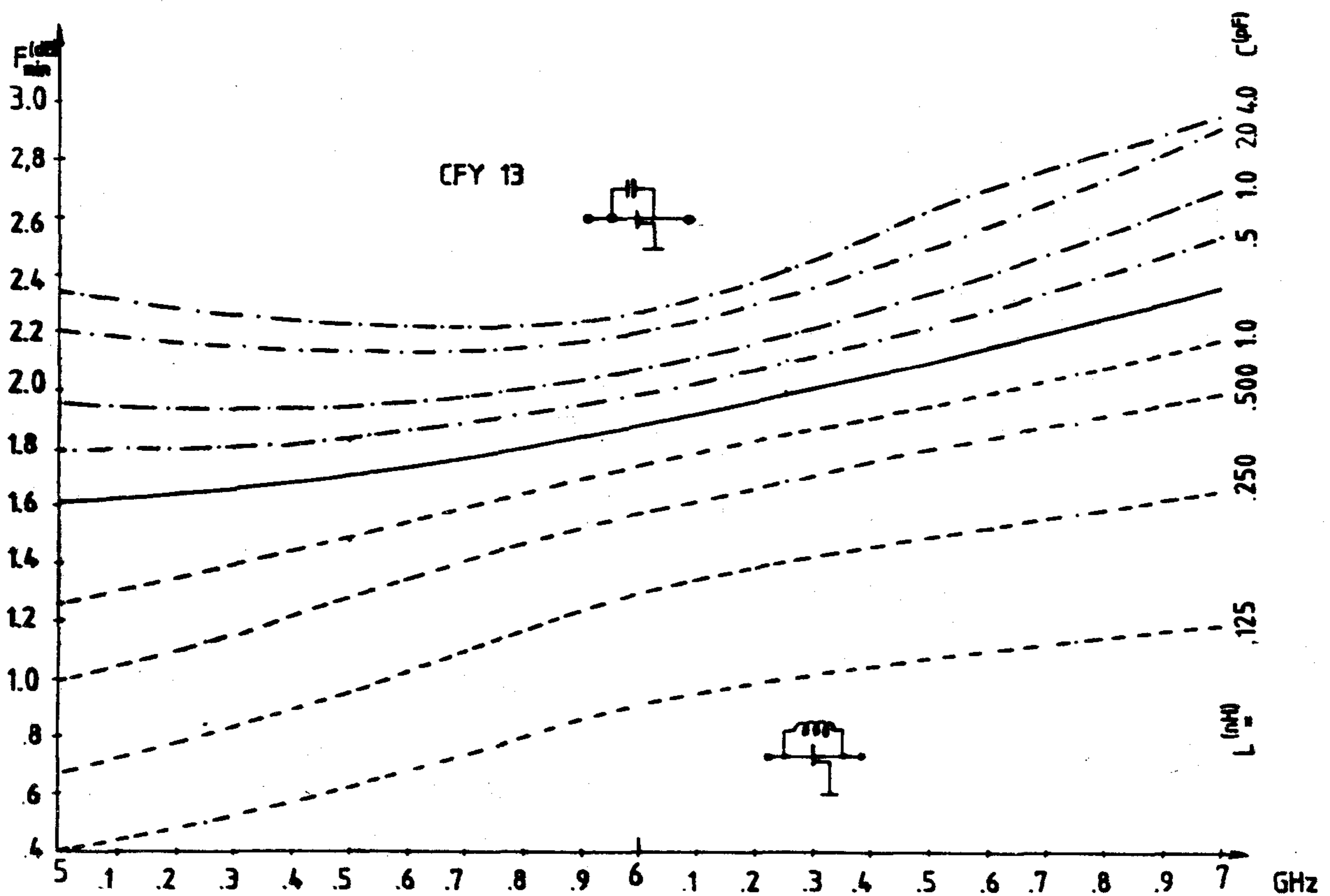
### 3. Az eredmények kiértékelése és felhasználása

Az előzőekben kapott összefüggések lehetőséget adnak arra, hogy a felhasználásukkal elkészített számítógépes program segítségével megvizsgálhassuk a párhuzamos visszacsatolás hatását a tranzisztor zajparamétereire, valamint ennek figyelembevételével az u.n.



6. ábra. A CFY-13 tranzisztor minimális zajtényezői tiszta ohmos visszacsatolás esetén ( $I_D = 30$  mA)

H557-6



7. ábra. A CFY-13 tranzisztor minimális zajtényezői tiszta reaktáns visszacsatolás esetén ( $I_D = 30$  mA)

H557-7

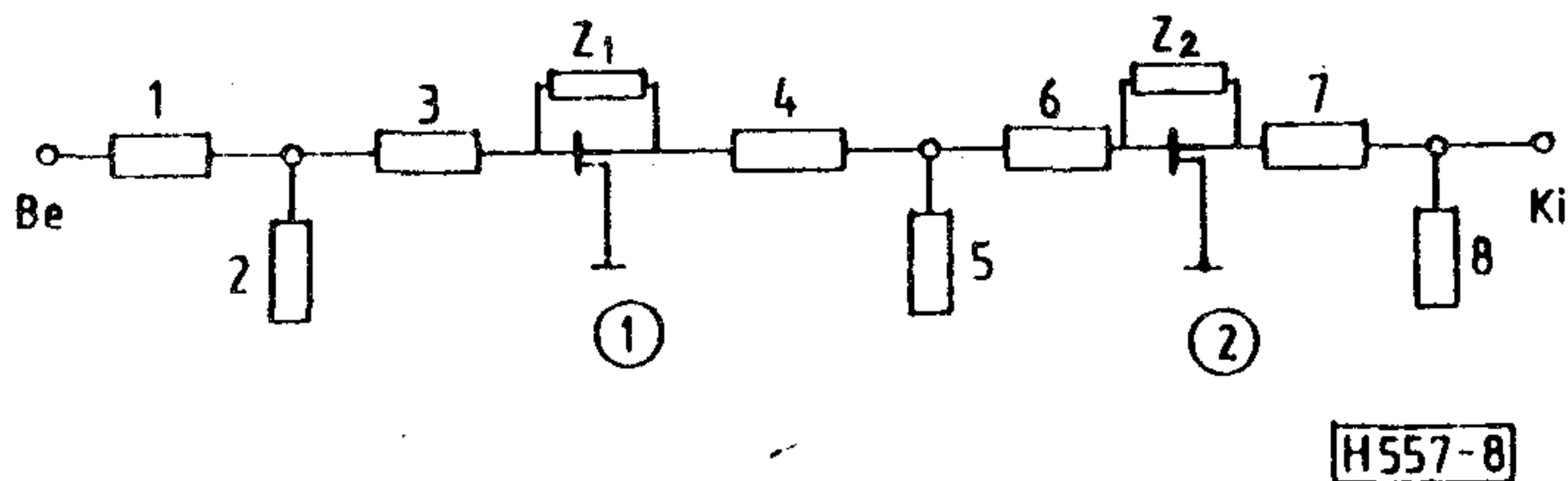
közvetlen csatolású több tranzisztoros erősítő paramétereit is kiszámíthatjuk.

Az elkészült program biztosítja:

- a visszacsatolt tranzisztor S-paramétereinek, valamint zajparamétereinek kiszámítását,

- egy vagy két tranzisztoros erősítő bemenő, csatoló és kimenő passzív, reaktáns hálózatainak optimalizálása mellett az erősítő paramétereinek meghatározását (a hálózatok elemei párhuzamos, illetve soros induktivitások és kapacitások, vala-





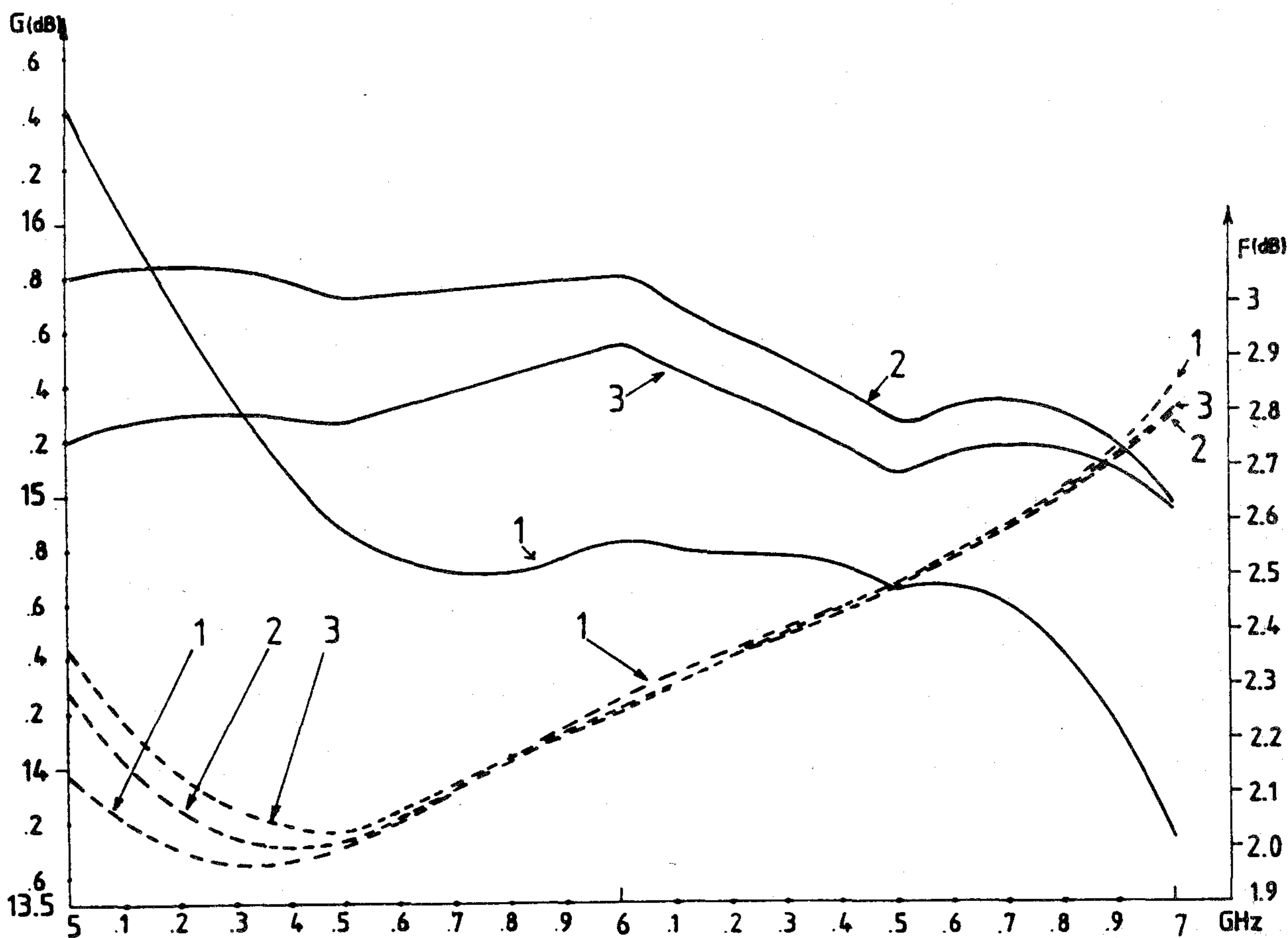
8. ábra. A két tranzisztoros közvetlen csatolású erősítő elvi vázlata

mint üres- és rövidrezárt tápvonalszakaszok),  
 – az optimalizálás paramétereit: zajtényező, erősítés, bemenő- és kimenő illesztés.  
 A fenti program IBM PC/AT gépen futtatható és Turbo Pascal nyelven íródott.

Illusztrációképpen 6. és 7. ábrákon láthatjuk a CFY 13 tranzisztor ( $I_D=30\text{ mA}$ ) minimális zajtényezőjét frekvencia függvényében 5-7 GHz-es frekvencia sáv-

ban. Vastag vonal jelzi a minimális zajtényező frekvenciafüggését abban az esetben, amikor visszacsatolás nincs. A 6. ábrán lévő görbék tiszta rezisztív visszacsatolásnál érvényesek, a 7. ábrán levők pedig tiszta kapacitív, vagy induktív csatolás esetén. Láthatjuk, hogy kapacitív és rezisztív visszacsatolás esetén a minimális zajtényező értéke növekszik, az induktív visszacsatolás esetén csökken.

A tranzisztor visszacsatolásának hatását megvizsgáló a fenti program felhasználásával kiértékelés történt a 8. ábrán látható felépítésű két CFY-13 típusú tranzisztoros közvetlen csatolású erősítő tekintetében. A 8. ábrán levő 1-gyel jelölt CFY-13 tranzisztor paramétereit  $I_D=10\text{ mA}$  beállításnak megfelelőek, a 2-vel jelölt CFY-13 tranzisztor paramétereit  $I_D=30\text{ mA}$  beállításnak felelnek meg. Az I. Táblázatban összefoglalva láthatjuk az erősítő passzív hálózatainak adatait három esetben:

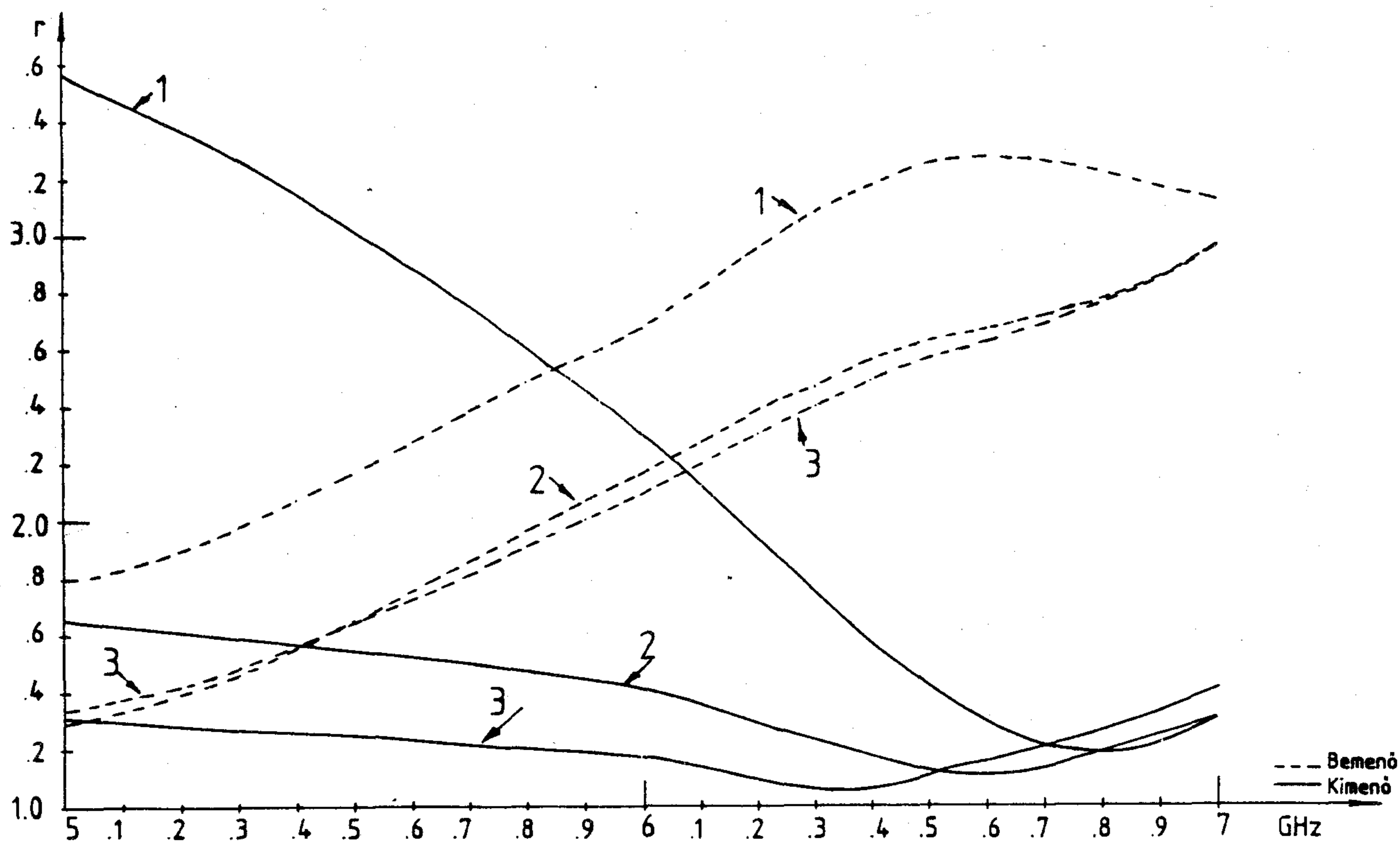


9. ábra. Két tranzisztoros erősítő átviteli erősítése (dB-bc) és zajtényezője frekvencia függvényében

H557-9

1. táblázat

ESET	1 vonal		2 vonal		3 vonal		4 vonal		5 vonal		6 vonal		7 vonal		8 vonal	
	$Z_o$ ohm	$\theta^o$ fok	$Z_o$ ohm	$\theta^o$ fok	$Z_o$ ohm	$\theta^o$ fok	$Z_o$ ohm	$\theta^o$ fok	$Z_o$ ohm	$\theta^o$ fok	$Z_o$ ohm	$\theta^o$ fok	$Z_o$ ohm	$\theta^o$ fok	$Z_o$ ohm	$\theta^o$ fok
1	37	139	38	25	58	33	66	49	51	38	46	71	37	79	21	20
2	35	137	35	27	54	34	61	47	57	36	41	70	74	44	42	21
3	36	136	36	27	54	34	61	46	58	35	40	67	86	37	46	19



H557-10

10. ábra. Két tranzisztoros erősítő bemenő-kimenő állóhullámaránya a frekvencia függvényében

1- esetben a tranzisztorok nincsenek visszacsatolva,  
2- esetben  $Z_1$  impedancia megfelel 300 ohm ellenállás és 1 nH induktivitás sorbakapcsolásának;  $Z_2$  impedancia megfelel 300 ohm ellenállás és 2 nH induktivitás sorbakapcsolásának,

3- esetben  $Z_1$  - a sorbakapcsolt 300 ohm ellenállásnak, 1 nH- induktitásnak és 0.704 pF kapacitásnak felel meg;  $Z_2$  - megfelel 300 ohm ellenállás, 2 nH induktitás és 0.352 pF kapacitás sorbakapcsolásának.

A 3-esetben  $Z_1$  és  $Z_2$  soros rezonancia frekvenciája 6 GHz. A 9. és 10. ábrákon láthatjuk az erősítő a fenti programmal kiszámított elektromos paramétereit frekvencia függvényében. A 9. ábrán folyamatos vonallal meg van jelölve az átviteli erősítés, a szaggatott vonallal a zajtényező. Az 1., 2., 3. jelölés az első, második, illetve harmadik esetet jelenti. Láthatjuk, hogy a tranzisztorok visszacsatolásának hatása a zajtényezőre nem túlságosan nagy. A visszacsatolás hatása az átviteli erősítésre jelentős. A 10. ábrán folyamatos vonallal meg van jelölve az erősítő kimenő, a szaggatott vonallal az erősítő bemenő állóhullám aránya. Látható, hogy a visszacsatolás hatása igen jelentős a kiemenet illesztésére (pedig az optimalizálás a zajtényezőre és az átviteli erősítésre történt). Különösen kedvező a helyzet a soros rezgőkörrel való visszacsatolás esetén.

## FÜGGELÉK

Az 5. ábrán levő hálózatnál:

$$I_1 + I_2 + i_1 = I'_1; I_2 + i_2 - I_Z - I'_2 = 0; I_Z \cdot Z + e_R + V_1 - V_2 = 0;$$

mivel

$$V_1 = V'_1; V_2 = V'_2; \text{ így } I'_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2; I'_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2;$$

Behelyettesítve és átrendezve kapjuk:

$$I_1 = \left(Y_{11} + \frac{1}{Z}\right) V_1 + \left(Y_{12} - \frac{1}{Z}\right) V_2 + \frac{e_R}{Z} - i_2;$$

$$I_2 = \left(Y_{21} - \frac{1}{Z}\right) V_1 + \left(Y_{22} + \frac{1}{Z}\right) V_2 - \frac{e_R}{Z} - i_2;$$

Az 5.b. ábránál levő hálózatnál:

$$I_1 + i - I_1^{(e)} = 0; e + V_1^{(e)} - V_1 = 0; V_2 = V_2^{(e)}; I_2 = I_2^{(e)};$$

továbbá

$$I_1^{(e)} = Y_{11}^{(e)}V_1^{(e)} + Y_{12}^{(e)}V_2^{(e)}; I_2^{(e)} = Y_{21}^{(e)}V_1^{(e)} + Y_{22}^{(e)}V_2^{(e)};$$

Behelyettesítve és átrendezve kapjuk:

$$I_1 = Y_{11}^{(e)}V_1 + Y_{12}^{(e)}V_2 - Y_{11}^{(e)}e - i;$$

$$I_2 = Y_{21}^{(e)}V_1 + Y_{22}^{(e)}V_2 - Y_{21}^{(e)}e;$$

F.2

A két áramkör elektromos ekvivalenciához szükséges:

$$Y^{(e)} = \begin{pmatrix} Y_{11} + \frac{1}{Z} & Y_{12} - \frac{1}{Z} \\ Y_{21} - \frac{1}{Z} & Y_{22} + \frac{1}{Z} \end{pmatrix}$$

$$\frac{e_R}{Z} - i_1 = Y_{11}^{(e)} \cdot e - i; \quad \frac{e_R}{Z} + i_2 = Y_{21}^{(e)} \cdot e;$$

Felhasználva F.3. és átrendezve megkapjuk a (2.4.a) és (2.4.b) összefüggéseket.

#### IRODALOM

- [1] *Tri T. Ha*: „Solid-State Microwave Amplifier Desing”, John Wiley and Sons, 1981. USA.
- [2] *G.D. Vendelein*: „Desing of Amlifiers and Oscillators by the S-Parameter Method”, John Wiley and Sons, 1982.USA.
- [3] *L.Besser*: „Stability considerations of low -noise transistor amplifiers with simultaneons noise and power match”, Int. Microwave Sym. Dig. Tech. Papers, pp. 327-329, 1975.
- [4] *G.D. Vendelin*: „Feedback effects on the noise performance of GaAs MFSPETs Int. Microwave Sxympt., Dig. Tech. Papers, pp. 324-326, 1975.
- [5] *J,Engberg*: „Simultaneous input power match and noise optimization using feedback”. European Microwave Conf., Dig. Tech. Papers. pp. 385-389, Sept. 1974.
- [6] *K.B. Niclas*: „Noise in Broad-band GaAs MESFET Amplifiers with Parallel Feedback”. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol MTT-30, pp. 63-70, No 1, January 1982.
- [7] *K.C. Gupta, R. Gard, R. Chadha*: Computer Aided Disign of Microwave Circuits”. ARTECH HAUSE, INC., 1981. USA.

## ISHM – Hungary

Az International Society of Hybrid Microelektronics hazai szervezetének legutóbbi rendezvénye a jún. 19-én sorra került szakmai nap volt. Megnyitójában Dr. Illyefalvi Vitéz Zsolt köszöntötte a jelenlévőket, majd bejelentette a szervezet törvényes bejegyzését, valamint ismertette az ISHM – USA köszöntőlevelét, mely hivatalosan deklarálja a magyar chapter felvételét a nemzetközi szervezetbe.

Ezután olyan neves külföldi szaklapok, mint a Hybrid Circuits és az amerikai Inside ISHM folyamatosan figyelemmel kíséri a magyar hibrid technológia fejlődésének alakulását és rendszeresen cikkeket jelentet meg a magyar technológia helyzetéről.

Ezután egy video rövidfilmet tekintettek meg a résztvevők a magyar hibrid technológiáról, melyet a BME ETT megbízásából készített a Globál KFT. segítségével Szabó Szergely Illefalvi V. Zsolt és Harsányi Gábor útmutatásával, valamint a gyártó cégek közreműködésével.

A következő programpont Harsányi Gábor beszámolója volt. Ő a Nürnbergben megrendezett konferencián és kiállításon vett részt (Messe Nürnberg '90). Itt az SMT, a BOÁK és a hibrid elemek tokozási technológiái voltak a fő témakörök és elsősorban a német technológia vezető egyéniségei ismertették kutatási eredményeiket. Rövid beszámoló hangzott el az idén először megrendezett ISMEC '90 (International Students of Microelektronics European Conference) hallgatói konferenciáról. Ezen hazánkat Borvendégh Norbert, Máhig Attila és Philippovics Ákos képviselte. A Zágrábban megrendezett konferencia az ottani műszaki egyetemen zajlott. Résztvevői végzős diákok, Phd-ösztöndíjasok, szakmérnökhallgatók voltak és a mikroelektronika teljes palettája képviseltette magát a számítógépes tervezéstől a szerelési technológiákig. Ez az első olyan lehetőség, melyen a diákok bemutatják nemzetközi közönség előtt munkáikat, s így mind a munkák színvonalát, mind idegen nyelven való előadói képességeiket meg tudják ítélni. A résztvevők szerint a magyar diákok tudományos munkáinak színvonala az európai élvonalba tartoznak.

A legközelebbi nagyobb szabású rendezvényünk 1990. nov. 21-én egy konferencia lesz amelyre komoly külföldi érdeklődés mutatkozik. Még van lehetőség magyar előadók jelentkezésére! Ez a rendezvény komoly lehetőség a kutatási munkák bemutatására és mivel nem kritérium friss eredmények megjelentetése, mód van egy átfogó képet adni és kapni a hazai helyzetről. Nem szükséges részletes beszámolót készíteni, elég egy rövidebb tartalmi kiadványt beadni Deák Istvánnak (MEV 1691-100/274).

# A megbízhatóság és a felhasználó költsége

DR. BALOGH ALBERT  
Mikroelektronika Vállalat

## Összefoglalás

A közlemény félvezető eszközök esetében vizsgálja a megbízhatóság növelésének költségkihatását. Rávilágít arra, hogy az alkalmazott megbízhatóságnövelő vizsgálatoknak a költsége nem haladhatja meg az ezek eredményeként jelentkező javítási költségcsökkenés mértékét. A tanulmány a vizsgálatok költségét a tétel nagyság függvényében értékeli. A költségek értékelési módszereit külföldi példák segítségével szemlélteti a szerző annak érdekében, hogy a jövőben a hazai alkatrészfelhasználók is költségorientált döntéseket hozzanak termékeik megbízhatóságának biztosítása érdekében.

## 1. Bevezetés

Napjainkban gyakran hangzik el Magyarországon a termékek vásárlóinak és felhasználóinak a körében az a mondat, hogy nem hajlandók a jobb minőségért, a nagyobb megbízhatóságért magasabb árat fizetni, azaz elvárják, hogy a gyártó ugyanazért az összegért adjon el egy közepes- és egy nagymegbízhatóságú terméket is. Ez a vélemény figyelmen kívül hagyja a megbízhatóságnak és a felhasználó összes költségének a kapcsolatát, azaz azt, hogy a nagyobb megbízhatóság kisebb javítási, tartalékolási költséget eredményez és így a megbízhatóságért kifizetett összeg teljesen megtérül és hasznot is eredményez.

Természetesen a vásárló mindig meg akar győződni, hogy a minőség és így a megbízhatóság ára valóban kifizetődő-e számára vagy sem. A vevő azt is tudni akarja, hogy meddig mehet el a jobb megbízhatóságú termék megvásárlásában. A jelen tanulmány ehhez a sok oldalú döntéshez kíván segítséget nyújtani azzal, hogy egy félvezető eszközöket (integrált áramköröket és diszkrét félvezetőket) felhasználó berendezésgyártó vállalat megbízhatósággal foglalkozó szakembereinek döntéselőkészítő megfontolásait vázolja. Hangsúlyozni kell, hogy a tanulmányban közölt elvi megállapítások és gyakorlati következtetések külföldi példákon alapulnak. Ez azt jelenti, hogy feltételezik, egy kiterjedt minőségtanúsítási rendszerben minősítik az elektronikai alkatrészeket. Ilyennek tekintjük az USA katonai minőségtanúsítási rendszerét, amelyet a MIL-STD-38510 [1] és MIL-STD-883 [2] szabványok határoznak meg; valamint a nyugat-európai minőségtanúsítási rendszert, amelyet részletesen leírnak a CECC 90000 [3], CECC 00107 [4] szabványok illetve az eze-

### Kulcsszavak:

**Magyarul:** Félvezető eszközök megbízhatósága. Megbízhatóság előrejelzés. Szűrővizsgálatok. Vizsgálati költség.

**Angolul:** Reliability of semiconductor device. Reliability prediction. Screening tests. Test cost.

Beérkezett: 1990. III. 27. (†)



BALOGH ALBERT

Matematikus, 1957-ben végzett a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetemen. 1961 óta foglalkozik az elektronikai

alkatrészek megbízhatóságának értékelésével a HIKI-ben, majd 1982 óta a MEV-ben. Jelenleg a MEV megbízhatóság vizsgálati főosztály főosztályvezető-helyettese.

A témakörben közel 50 publikációt jelentetett meg, illetve számos előadást tartott. 1981-ben az EOQC Quality folyóiratának EQ-díját kapta meg „Rendszer megbízhatóság-előrejelzés” című tanulmányáért. A HTE elnökségi tagja, a megbízhatósági osztály titkára, 1976-ban Puskás Tivadar – díjat kapott.

ket követő IECQ rendszert, amelynek publikációi közül [5], [6] kiadványokat emeljük ki.

(IECQ = International Electrotechnical Commission Quality Assessment System for Components).

Másrészt a tárgyalás során felhasználjuk az elektronikai alkatrész minőségi osztályai (szintjei) és megbízhatóságuk közötti kapcsolatot is leíró ún. megbízhatóság előrejelzés modelleket, amelyeket legtöbbször a MIL-HDBK 217 E [7] kézikönyv ír le és emeljük ki a hazai szakirodalomban a Balogh – Gerlai [8] tanulmány is foglalkozik. A külföldi példa azért is szükséges, hogy a minőség és megbízhatóság különböző fokozataiban gondolkozva tudjuk meghatározni a különböző járulékos költségeket. A tanulmány ezzel kívánja elősegíteni a hazai felhasználók költségorientált megbízhatósági döntés-előkészítését.

## 2. A felhasználói költségek elektronikai alkatrészek esetében

A félvezető eszközöket felhasználó berendezésgyártónak elsődleges célja annak átgondolása, hogy egy félvezető eszköz tényleges költsége hogyan jelentkezik gyárában és számba kell vennie azokat a tényezőket, amelyek növelik illetve csökkentik ezeket a költségeket.

Nyilvánvaló, hogy a megbízhatósági vizsgálatokat – ezeken belül a 100 %-os roncsolás mentes jellegű szűrővizsgálatokat – nem lehet ingyen elvégezni. Ezeknek a vizsgálatoknak a költségei hozzáadódnak az egyes eszközök beszerzési árához, vagy azért, mert ezeket a vizsgálatokat az alkatrészgyártó végzi el (ez a szokásos külföldön), vagy azért, mert ezeket a vizsgálatokat a berendezésgyártónak kell elvégeztetnie (ez a hazai gyakorlat), mert sokszor külföldről vásárolják az ismeretlen minőségű és megbízhatóságú eszközöket.

Ekkor arra a kérdésre, hogy miért aggódunk emiatt, az a válasz, hogy a nagy nemzetközi minőségtanúsítási rendszerek követelményeinek megfelelően ezekre a vizsgálatokra szükség van. Ezen túlmenően azonban két kérdést kell feltenni:

1/ Milyen mértékű megbízhatósági vizsgálatot követel meg a felhasználó?

2/ Milyen vizsgálatok lesznek a leggazdaságosabbak?

Ezek a kérdések csak akkor válaszolhatók meg, ha megvizsgáljuk a berendezésgyártó által konstruálandó rendszer alkatrész-költségeinek összetevőit, és információt kapunk arra vonatkozóan, hogyan értékelhető az a költség-egyensúly, amely ezen költségek és a megbízhatósági vizsgálat várható haszna között állapítható meg:

A felhasználói költséget úgy definiáljuk, mint az összes olyan alkatrészvonatkozású költséget, amely a rendszer várható élettartama alatt lép fel. Ennek a költségnek három összetevőjét különböztetjük meg:

a/ Az alkatrész teljes beszerzési (bekerülési) költsége, amely az alkatrész költségének, a szűrővizsgálat költségeinek és a felhasználó saját beszerzési költségeinek összege.

Ezek a beszerzési költségek (a járulékos költségekkel együtt) magukba foglalják a vásárlással kapcsolatos költségeket, az előírások elkészítésének és karbantartásának költségeit, az üzemi minőségbiztosítás költségeit és az idegenárú ellenőrzés költségét. Nyilvánvaló, hogy ezek a költségek az egyes megvásárolt eszközökre terhelődnek, tehát tétel nagyság-függőek.

b/ A rendszer összeszerelése alatt és a vizsgálati ciklus után fellépő meghibásodások miatt szükséges cserealkatrészek költségei. Ezek a költségek a bejövő minőségi szintre (hibaszintre) vonatkoznak és nem a megbízhatóságra. Ezt szokásos jellemezni a PPM-szinttel (PPM = Parts Per Million, azaz egy millió eszközre vonatkoztatott hibaarány).

c/ A rendszer üzemeltetése során felhasznált cserealkatrészek költsége.

$$C_R = n \times \left( C_E + \frac{C_B}{n} \right) + \left( C_{J1} \cdot H \right) + \left( C_{J2} \cdot \frac{L}{M} \right)$$

H595-1

1. ábra. A teljes alkatrészvonatkozású költség

ahol

$C_R$  = a teljes rendszer alkatrész vonatkozású költségei,

$n$  = az alkatrészek száma,

$C_E$  = egy alkatrész átlagos költsége,

$C_B$  = a beszerzés költségei járulékos költségekkel együtt,

$C_{J1}$  = a gyártás során egy alkatrész javítási költsége,

$H$  = a meghibásodott darabok száma,

$C_{J2}$  = az üzemeltetés során egy alkatrész javítási költsége,

$L$  = a rendszer tervezett élettartama,

$M$  = a rendszer MTBF-je (Mean Time Between Failures = Átlagos Működési Idő)

Ezeket a költségeket az 1. ábrán látható képletben foglaljuk össze.

A rendszer Meghibásodások Közötti Átlagos Működési Ideje, azaz MTBF\* értéke soros rendszer (egy alkatrész meghibásodása a rendszer meghibásodását idézi elő) és az alkatrészek exponenciális működési idő eloszlása esetén (ekkor a meghibásodási ráta az átlagos működési idő reciprokával egyenlő) a következőképpen fejezhető ki az egyes alkatrészek MTBF<sub>i</sub> (i=1,...,n) átlagos működési idejével:

$$MTBF = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{MTBF_i} \right)^{-1}$$

Ha  $MTBF_1 = MTBF_2 = \dots = MTBF_n$ , akkor

$$MTBF = \frac{MTBF_1}{n}$$

Például, ha  $MTBF_i$  (i=1,2,3,4) = 6000, 4000, 1200 és 8600 óra, akkor

$$MTBF = \left( \frac{1}{6000} + \frac{1}{4000} + \frac{1}{1200} + \frac{1}{8600} \right)^{-1} = 732 \text{ óra.}$$

Ha egy átlagos alkatrész MTBF-értékkel számolunk, akkor

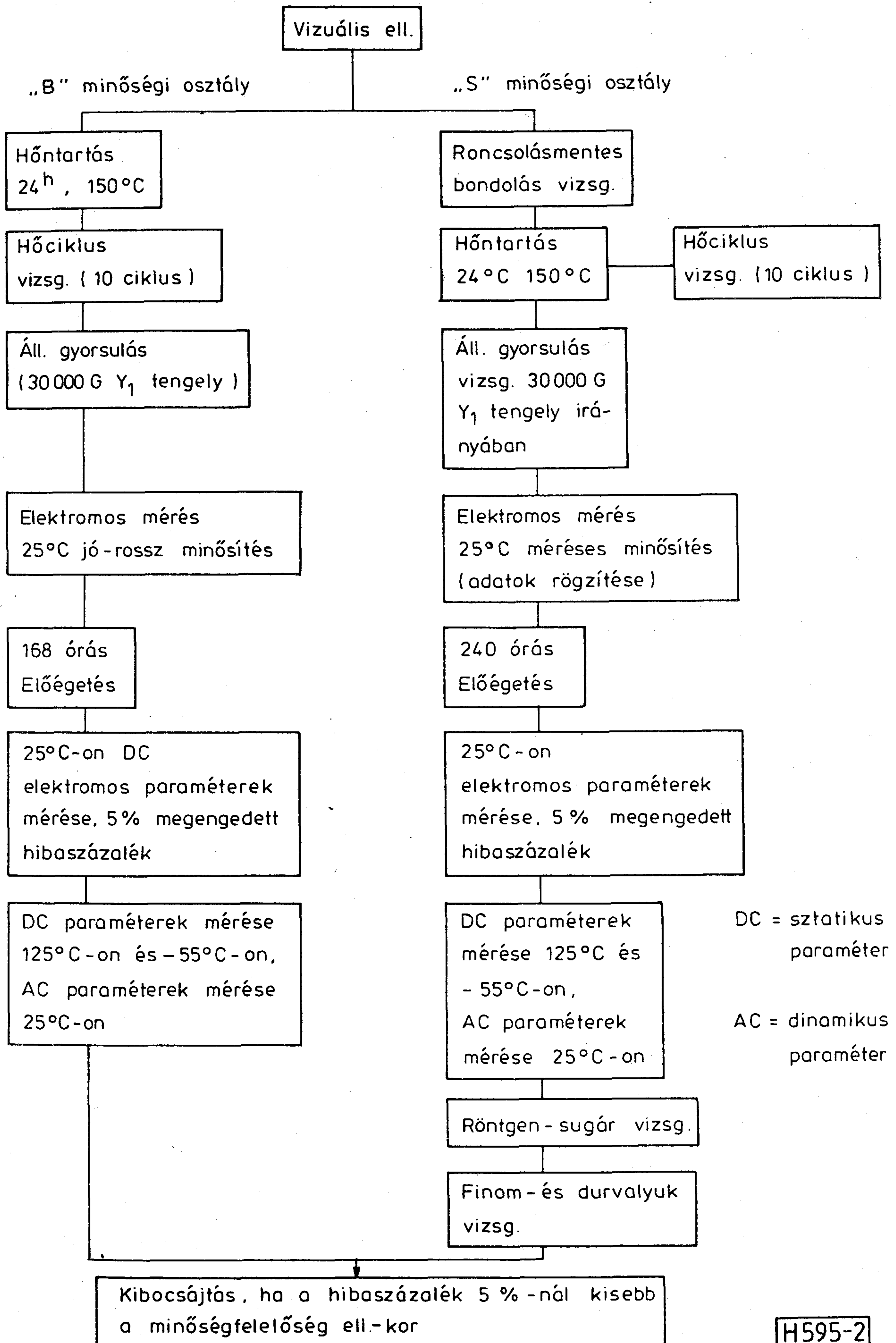
$$\overline{MTBF} = \frac{6000 + 4000 + 1200 + 8600}{4} = 4950 \text{ óra,}$$

így ezt az értéket felhasználva a rendszer MTBF

$$MTBF = \frac{\overline{MTBF}}{4} = \frac{4950}{4} = 1238 \text{ óra.}$$

Az alkatrészek MTBF-jét az előrejelzési modellekből ([7], [8]) számított alkatrész meghibásodási ráta reciprokaként kapjuk meg, ezzel később foglalkozunk. Ebben a részben csak azt kell megjegyezni, hogy a rendszer MTBF-je meghatározza a rendszer várható javítási gyakoriságát. Mivel a rendszerben minden egyes eszköz meghibásodása olyan rejtett meghibásodási mechanizmus következtében lép fel, amelyet nem tárt fel a 100 %-os szűrővizsgálat, nyilvánvaló, hogy a szűrés költségeinek növekedésével az MTBF is növekedni fog. A szűrés ugyanis több potenciális meghibásodást távolít el a beérkezett alkatrész-tételből az esetben, ha széles körű vizsgálatot végzünk, ennek eredményeként kevesebb rejtett hibás alkatrészt fognak a rendszerbe beépíteni. A MIL-STD 38510 szerinti szűrővizsgálatok közül a „B” és „S” minőségi osztályok (ipari minőség és katonai minőség) szűrővizsgálati sorozatát láthatjuk a 2. ábrán. A szűrővizsgálatok olyan 100 %-os roncsolásmentes vizsgálatok, amelyek

\* MTBF = Mean Time Between Failures



2. ábra. Ipari („B” osztály) és katonai minőségű („S” osztály) hermetikus tokozású integrált áramkörök szűrővizsgálatai (MIL-STD-38510)

a potenciálisan hibás eszközöket eltávolítják a tételből, ugyanakkor a jó eszközöknek a megbízhatóságát nem csökkentik, azok további felhasználását lehetővé teszik.

Az 1. ábrán megadott képletben némely költségfajta rögzített, mások kisebb, megint mások igen nagy mértékben változhatnak. Ezért mindegyik költséget részletesen elemezni kell a következőkben és a költségek közötti összefüggéseket gondosan meg kell vizsgálni annak érdekében, hogy minimalizáljuk a felhasználónál jelentkező teljes költséget.

### 3. A félvezető eszközök gyártása során fellépő költségek

A félvezető eszközök fő gyártási költségei három összetevőből állnak: összes munkabér (munkaerőköltség), az összes anyag-költség és az üzemi rezsiköltség. Az egy eszközre eső munkaerőköltség bármely gyártási művelet esetében a munkabér osztva a gyártási műveleten óránként áthaladt eszközök számával. Azoknak a daraboknak a munkaköltsége, amelyeket hibás voltuk miatt a tételből eltávolítanak egy adott művelet utáni ellenőrzéskor, azokra a darabokra terhelődnek, amelyek jóknak bizonyultak, és így a gyártási tételben továbbra is megmaradnak. A folyamatkihozatal javulása, illetve romlása ezért jelentős hatással van az egyes darabokra jutó költségre.

Ezek a gyakorlati felismerések arra vezettek, hogy a félvezető gyártók az utóbbi néhány esztendőben jelentős mértékben növelték a szeletgyártás és a szerelés (ez a két művelet igen fontos a félvezető gyártásban) minőségét. Az így kialakított minőségügyi rendszer kihozatalnövekedést eredményezett, ez pedig nemcsak kiegyenlítette a minőség-növelésre fordított anyagi befektetések költségét, hanem a jobb minőség és a nagyobb kihozatal révén nyereséget is eredményezett.

Az anyagköltség tartalmazza a szeletgyártásból kikerülő chipék költségét (természetesen ennek részben munkaerőköltség vonzata is van), a tokozási és a szerelési anyagok költségét, valamint a feldolgozás és a szűrés során felhasznált kémiai anyagok költségét is. Hasonlóan a munkaerőköltséghez, a kiselejtezett és visszautasított darabok anyagköltsége átkerül a jó darabok költségére.

Az üzemi rezsiköltség számos közvetett költségből áll, amelyet arányosan kell vetíteni a közvetlen munkabérre, hogy az összes költséget meghatározhassuk. Az üzemi rezsiköltség tartalmazza az egyes részlegek ellenőrzési (felügyeleti) költségét, a berendezések értékcsökkenését, az üzemi épületrész bérleti díját (költségét) és a karbantartási költséget, az alkalmazottak társadalombiztosítási járulékát és a közmű költségeket.

Mivel a félvezető ipar nagyon tőkeigényes ipar, amelynek területén a berendezések elavulása gyorsan megy végbe, az üzemi költség az eszköz összes költségének nagy hányadát képezi. A félvezető gyártók olyan

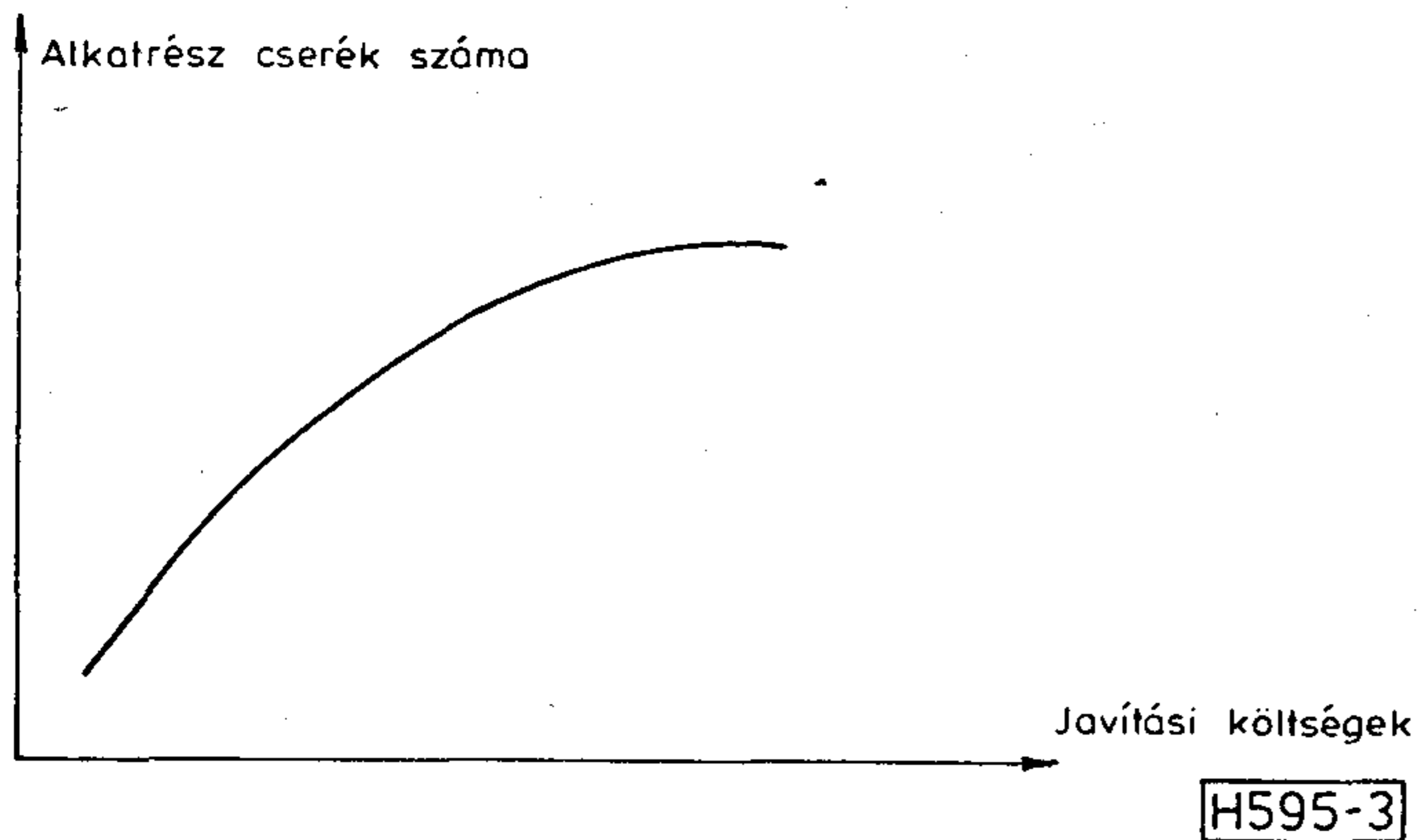
költségelemző rendszert dolgoztak ki, amely az árképzést a tényleges költségekre alapozva végzi el. Az így kialakított ár azonban nemcsak a már említett költségeket foglalja magába, hanem a kutatás-fejlesztés kiadásait és a kereskedelmi költségeket is. Ezen túlmenően figyelembe kell venni az általános kiadásokat és az adminisztrációval járó költségeket is, valamint a nyereség kívánatos mértékét. Az eladási ár egyedüli könnyen kézben tartható része a nyereség.

A fokozott mértékű szűrés költsége, amely lehetővé teszi a rejtett hibás termékek eltávolítását a tételből, hozzáadódik az eladási árhoz, mivel a további munkabér kiadásokat, továbbá berendezés üzemi költségeket jelent. Ezt az ár-növekedést azonban kiegyenlítik azok a megtakarítások, amelyeket a felhasználói költségekben érnek el az eszköz megvásárlói.

### 4. A rendszer javítási költségei az üzemeltetés során

A rendszerek (berendezések) gyártói nagyon gyakran figyelmen kívül hagyják az alkatrészekre vonatkozó megbízhatósági követelmények meghatározása során a rendszer javítási költségeit. Ennek oka abban keresendő, hogy a javításokat csak a távoli jövőben végzik el, amikor a rendszer tervezésének és szerelésének problémáit már régen megoldották. Az emberi gondolkodásból adódik, hogy a közvetlen napi feladatokat oldják meg és nem gondolnak a jövőre. Egy óvatos és éber alkatrészfelhasználónak azonban meg kell vizsgálnia a rendszer javítási költség különböző tényezőit. Ezeknek a tényezőknek az értékváltozása a teljes rendszer alkatrész vonatkozású költségeinek a megváltozását eredményezi. Nyilvánvaló, hogy rövidebb rendszer-élettartam alatt kevesebb alkatrészt kell cserélni meghibásodás miatt. Napjainkban azonban az irányzat az, hogy a rendszereket hosszabb élettartamra tervezik. A rendszerben felhasznált alkatrészek száma 50 %-kal csökkenthető azáltal, hogy bonyolultabb alkatrészeket építenek a rendszerbe. Ez azonban nem vezet 50 %-os költségcsökkenéshez. A bonyolultabb integrált áramkör megbízhatósága (MTBF-je) természetesen kisebb, mint egy azonos technológiával előállított, kevésbé bonyolult eszközé. Ennek ellenére azonban a rendszer megbízhatóságában (MTBF-jében) növekedés érhető el a bonyolultabb félvezető eszközök alkalmazásával. Az alkatrészek cseréjének költsége (beleértve a rendszer állásidejének költségét is) általában rögzített. Az alkatrészek cseréje helyetti kártyacserék általában csökkentik az állási időt, de az egyes eltávolított kártyákat ki kell javítani, majd vissza kell küldeni a tartalékkészlet raktárba.

A csere költségei egyetlen helyen csökkenthetők hatásosan, ez pedig az 1. ábrán látható képlet MTBF tagja. Ha az MTBF 50 %-kal nő, akkor a csere költségei ebben a képletben (ld. utolsó tag az összegben) közel 50 %-kal csökkennek. A csere költségeinek és a cserélt alkatrészek számának összefüggését a 3. ábrán



3. ábra. A cserék költségfüggése

láthatjuk. Mivel az üzemi rezsi költségek állandóak (ide soroljuk a vizsgáló eszközök karbantartási költségét, stb.) az egyes alkatrészre eső csere költsége meredekebben növekszik, mint a cserélt alkatrészek száma.

### 5. A rendszer gyártása soráni javítás költségei

Ha egyetlen alkatrészt sem cserélnének a rendszer összeállítása (szerelése) és vizsgálata során, akkor a berendezésgyártónak nem lenne szüksége olyan rendelések feladására, amelyek a szerelés és vizsgálat alatt meghibásodott alkatrészek pótlására szolgálnak. Nyilvánvaló azonban, hogy ez esetben is fel kell adni többlet rendelést, mivel az alkatrészek tárolása és kezelése során azok károsodást szenvedhetnek. Ezek a meghibásodások azonban már függetlenek a megbízhatósági szinttől és a legtöbb alkatrészgyártó olyan programokat vezet be, amelyek gyakorlatilag kiküszöbölik az ilyen jellegű hibákat. Ilyen például a Zéró Hiba Program. Fel kell hívni a figyelmet, hogy a *megbízhatóság* az időben változó minőségi tulajdonságukat jellemzi, ugyanakkor a kezdeti minőség, azaz a *megfelelőség*, a termék kibocsátása, illetve átvétele során kezdeti tulajdonságokat írja le. A minőségnek tehát ebben a felsorolásban két összetevője van; a kezdeti minőség (megfelelőség) és a megbízhatóság. A két összetevő közötti mennyiségi összefüggés a későbbiekben ismertetendő minőségi tényezővel írható le. Ez a tényező az alkatrész minőségtanúsításának eredményeként a különböző osztályokhoz hozzá rendel egy értéket, amely megadja, hogy az adott minőségi osztályokhoz tartozó alkatrész MTBF-je, hányszorosa a kereskedelmi minőségi osztályba tartozó alkatrészeknek. Így az alkatrészek kezdeti minőségének (megfelelőségének) ellenőrzésére szolgáló vizsgálatok és szűrővizsgálatok nem szigorú értelemben vett megbízhatósági vizsgálatok, amelyek eredményeként időjellel mutatók származtathatók. Ugyanakkor nagyon nehéz éles elválasztó vonalat húzni a megfelelés és a megbízhatóság közé. Például a rendszer szerelése és vizsgálata során előforduló alkatrészhibák általában a kezdeti minőségre vonatkoztathatók és PPM (Parts Per Million = Egy Millió Alkatrészre Vonatkoztatott Hiba-

szám) értékkel fejezhető ki. A gyártás során előforduló javítások költsége, amely az 1. ábrán látható összefüggés második tagja, hasonló jellegű, mint a 3. ábrán látható üzemi javítási költségek függvénye.

### 6. A vizsgálati költségek és a rendszerköltségek közötti kapcsolat

Nyilvánvalónak látszik, hogy az alkatrészek szűrővizsgálati költségei a rendszer javítási költségei (a gyártási összeszerelés és az üzemeltetés alatti javítások költségei) között fordított arányossági kapcsolat van. Ha az egyik növekszik, akkor a másik csökken. A célkitűzés egy szűrővizsgálati sorozat megválasztásában abban rejlik, hogy meg kell találni azt a függvénypontot, amelyre teljesül, hogy

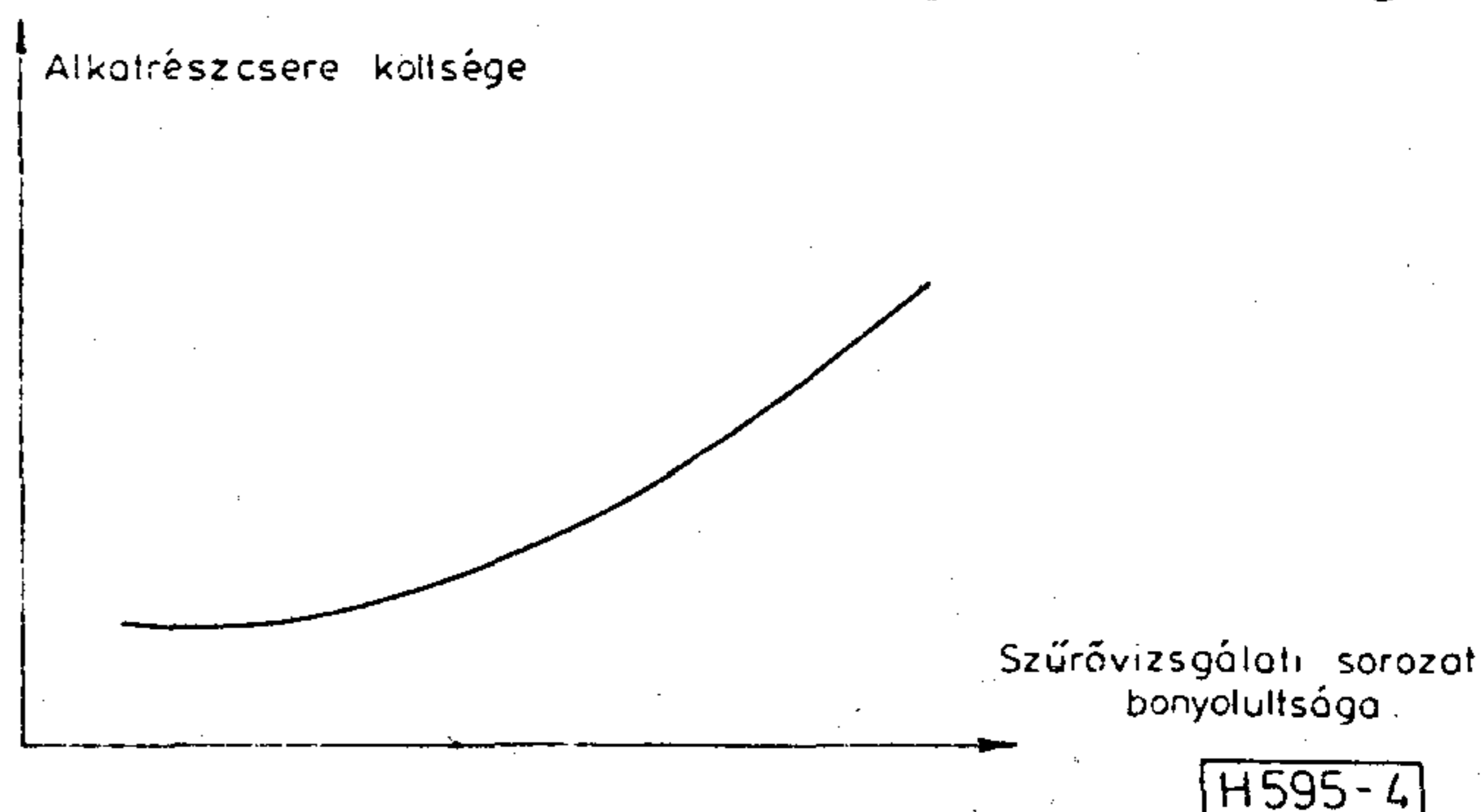
A VIZSGÁLATI KÖLTSÉGEK ÖSSZEGÉBEN BEKÖ- VETKEZETT VÁLTOZÁS	=	A JAVÍTÁSI KÖLTSÉGEK ÖSSZEGÉBEN BEKÖVET- KEZETT VÁLTOZÁS
---	---	--

$$\Delta \Sigma c_v = \Delta \left( c_{J1} H + c_{J2} \frac{L}{M} \right)$$

Megjegyzendő, hogy sem a javítási költségek nem csökkennek állandó meredekséggel, sem a vizsgálati költségek nem növekednek állandó meredekséggel. Sok szűrővizsgálat, így például a hőntartás és a hőciklusvizsgálat könnyen elvégezhető nagy darabszámban is és ez csak csekély vizsgálati költséget jelent az alkatrész árában. Az előégetés vizsgálatot és a belső vizuális ellenőrzés minden alkatrészen el kell végezni ugyan, azonban még ez is csak mérsékelt alkatrész ár-növekedést eredményez. A részecske zajvizsgálat azonban már igen időigényes és jelentős növekedést eredményez az egy alkatrészre vetített költségben.

A szűrővizsgálati költségek részletes tárgyalása előtt vegyük figyelembe a 4. ábrát, amely megadja, hogy egy alkatrészre eső vizsgálati költség logaritmikusan növekszik a szűrővizsgálati sorozat bonyolultságának függvényében.

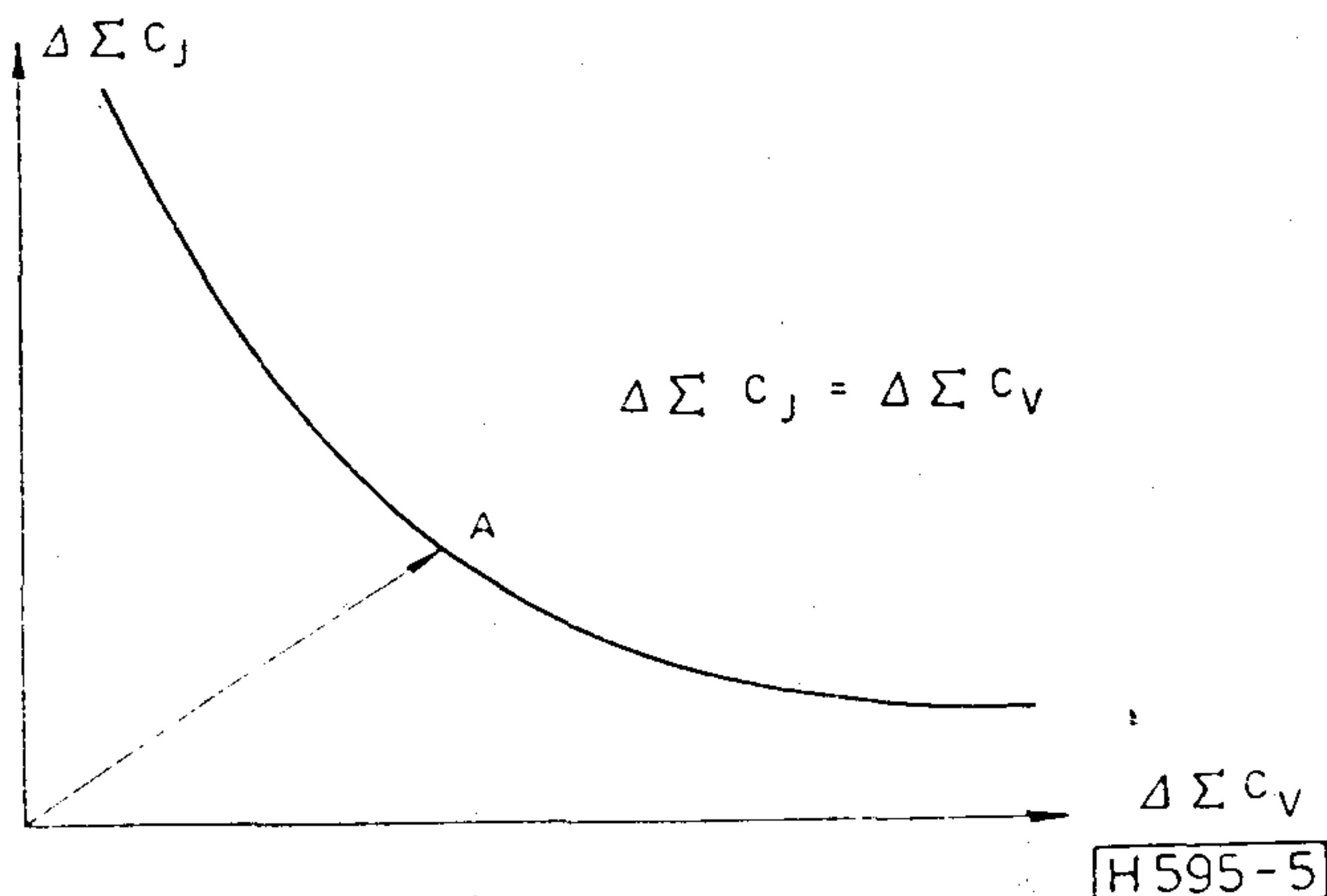
Az előzőekben közölt egyenletre vonatkoztatva megállapítható a 4. ábrán látható görbe meredeksége



4. ábra. A szűrővizsgálatok költségfüggése



$(\Delta \Sigma c_v)$  növekszik a szűrővizsgálatok bonyolultságával, ugyanakkor a 3. ábrán látható javítási költség görbe meredeksége  $(\Delta \Sigma c_j)$  csökken az alkatrészcsere számával. Az előző képlet abban a görbe pontban teljesül, amelyben  $\Delta \Sigma c_j = \Delta \Sigma c_v$ . Ezt jobban illusztrálja az 5. ábra, amely megadja a javítás költségeinek változását a vizsgálati költségek összege változásának függvényében. Az 5. ábrán látható „A” pontban teljesül az



5. ábra. Költségyensúly változása

egyenlőség. Az 5. ábrából látható, hogy a kevésbé költséges szűrés meredekebb javítási költségcsökkenést eredményez. Így például a viszonylag olcsó, az ipari minőség egyik osztályát jellemző szűrővizsgálat  $\pi_Q = 5,0$  minőségi tényezőt eredményez, amely ötszörös MTBF javulást idéz elő. Ugyanakkor egy költséges szűrővizsgálati sorozat már csak kisebb mértékű javítási költségcsökkenést eredményez. Például egy  $\pi_Q = 2$  értékhez tartozó szűrővizsgálat csak kétszeres MTBF javulást idéz elő. Az „A” pontban a két költségváltozás egyenlő, ez az optimális szűrővizsgálati pont.

## 7. Az MTBF (vagy a $\lambda$ -faktor) meghatározása

Az MTBF (a meghibásodások közötti átlagos működési idő) a  $\lambda$ -faktor (a meghibásodási ráta) reciproka exponenciális működési idő eloszlás esetében. Az alkatrészek meghibásodási rátájának előrejelzett értékét  $10^{-6}$ /óra egységekben a [7] kézikönyv adja meg a különböző alkatrész kategóriákra (integrált áramkörök, diszkrét félvezető eszközök, ellenállások, kondenzátorok, stb.). Az előrejelzési modellt integrált áramkörök

$$\lambda_p = \pi_Q \times (C_1 \times \pi_T + C_2 \times \pi_E)$$

Előrejelzett meghibásodási ráta  $10^{-6}$ /óra egységekben

Minőségi tényező

IC bonyolultsági meghibásodási ráta

Hőmérséklet gyorsítási tényező

Tokozási bonyolultsági megh. ráta

Alkalmazási környezet

$\pi_Q = 0,25$   
(katonai minőség)  
(S minőségi osztály)  
 $\pi_Q = 1,0$   
(Ipari minőség, B minőségi osztály)  
 $\pi_Q = 2,0; 4,0$   
(Ipari minőség kevésbé szigorú B-1, B-2 minőségi osztály)

$C_1 = 0,01$   
 $10^{-6}$  óra  
lineáris eszközre  
- 100 tranzisztor esetén

lineáris IC-re  
 $T_1 = 35^\circ\text{C}$  réteg  
hőm-re  
 $\pi_{T_1} = 0,23$   
 $T_2 = 110^\circ\text{C}$ -ra  
 $\pi_{T_2} = 27,0$

Hermetikus tokozás, 8 kivezető  
 $C_2 = 0,02$   
 $10^{-6}$ /óra

$\pi_E = 0,38$   
laboratóriumi környezet,  
 $\pi_E = 13$   
rakéta környezet

6. ábra. Meghibásodási ráta előrejelzési modellje

H595-6

esetében a 6. ábrán láthatjuk. Az előrejelzési modelleket a rendszer minden alkatrészére kiszámítva, megkapjuk a rendszer meghibásodási rátáját úgy, hogy soros rendszer (egy elem meghibásodása a rendszer meghibásodását okozza) esetében az alkatrészek meghibásodási rátáit összeadjuk, a rendszer MTBF-je ennek az értéknek a reciproka lesz.

Számítsuk a lineáris IC meghibásodási rátáját két különböző esetben: a) földi laboratóriumi környezet,  $\pi_Q = 2,0$ -vel jellemzett ipari minőségi osztály; b) rakéta környezet,  $\pi_Q = 1,0$  minőségi tényező. Az első esetben  $T_1 = 35^\circ\text{C}$ , a másodikban  $T_2 = 110^\circ\text{C}$ .

$$a) \lambda_p = \pi_Q / c_1 \pi_T + c_2 \pi_E / = 2./0,01 \cdot 0,23 + 0,002 \cdot 0,38 / = 0,00612 \cdot 10^{-6} / \text{óra}$$

$$b) \lambda_p = 1./0,01 \cdot 27 + 0,002 \cdot 13 / = 0,296 \cdot 10^{-6} / \text{óra}$$

Az első esetben egy lineáris IC MTBF-je a következő:

$$\text{MTBF} = \frac{1}{\lambda_p} = \frac{1}{0,00612 \cdot 10^{-6}} \text{óra} = 163\,400\,000 \text{óra},$$

a második esetben az MTBF

$$\text{MTBF} = \frac{1}{0,296 \cdot 10^{-6}} \text{óra} = 3\,356\,000 \text{óra}.$$

Ha a soros rendszer 10.000 azonos alkatrészből állva (egyszerűsítő feltevés), akkor a rendszer MTBF-je

$$\frac{163\,400\,000}{10\,000} = 16\,340 \text{óra lenne az a) esetben.}$$

Ha ezt a rendszert két évig kívánjuk működtetni (17 520 óra), akkor mindössze egy javítást kellene elvégezni átlagosan, így már a  $\pi_Q = 2,0$  minőségi tényezőjű ipari osztályba tartozó alkatrész alkalmazása is megfelelő megbízhatóságot nyújt. Ha magasabb minőségi osztályú ( $\pi_Q = 1$ ) eszközöket használunk fel, az MTBF 2-szeresére növekedne.

A második esetben tegyük fel, hogy 1000 alkatrészből áll a rendszer (ismét egyszerűsítő feltevessel élünk),

$$\text{ekkor a rendszer MTBF-je } \frac{3\,356\,000}{1000} = 3\,356 \text{óra}$$

lenne. Ez ugyan megfelelő megbízhatóság egy rakéta esetében, mivel a rendeltetés szerinti felhasználás ideje néhány perc. Azonban ennek a rendszernek a javítási költségét nem lehet alapul venni, mivel ha a rakétát kilőtték, az már nem javítható. Ezért egy alkatrész-meghibásodás következménye az, hogy a rakéta is megsemmisül, tehát a rakéta teljes költsége jelentkezik ekkor veszteségként. Ebben az esetben tehát a szűrést nem lehet alkalmazni az MTBF növelésére. Ekkor tartalékolási módszerekkel javítható a megbízhatóság.

## 8. Beszerzési költségek

A beszerzési költségek egyik fontos, de gyakran figyelmen kívül hagyott területe a rendszergyártójának beszerzéssel kapcsolatos járulékos költségei. Így például

egy megrendelés elküldésével kapcsolatos költségek, a megrendelés figyelemmel kísérésének és ügyintézésének költsége addig, amíg az alkatrészt valóban le szállítják, átveszik és a beérkezett árut a gyártó telephelyére nem irányítják és végül a számlát kifizetik a beérkezett anyagért. Ezek a költségek vásárlási megrendelésenként nem változnak. Körübelül azonosak akár 20 darab alkatrészt, akár 20000 darabot rendelünk meg. Azonban van néhány olyan szabályozó szempont, amelyet gyakran elhanyagolnak.

Az első az, hogy lehetséges a felhasználó részéről a feladott vásárlási rendelések számának szabályozása. Ha 1200 alkatrészt egy tételben rendelünk, vagy 200 alkatrészt rendelünk hat alkalommal, akkor nyilvánvalóan az utóbbi, egyenkénti rendelés jelentősen többbe kerül (még ha figyelmen kívül hagyjuk azt, hogy egy alkatrészre eső költség változhat a rendelés nagyságával, ezt később tárgyaljuk). Ha egy gyártó egy évre biztosítja előre szükségleteit, nyilvánvalóan jelentős belső megtakarítást ér el. Ugyanakkor meg kell jegyezni, hogy a megtakarítások egy részét arra kell majd fordítania, hogy a nagyobb raktárkészletek költségeit fedezze. Nagyobb projektek (például repülőgép fejlesztési programok) esetében szokásos, hogy összehangolt beszerzési programot hoznak létre, amelynek során, vagy a fővállalkozó vásárolja meg összes alvállalkozója részére a szükséges alkatrészeket, vagy lehetővé teszi, hogy az alvállalkozók csatlakozzanak a fővállalkozó rendeléseihez. Mindkét esetben a rendszer beszerzési költsége csökken, mivel az ismételt tárgyalások, a többszörös ügyintézés és ellenőrzés költségeit kiküszöbölik.

A második terület, amely költséges pénzügyi tétel, az egyedi – nem szabványrendszerbe (például IEC, MIL, stb.) tartozó előírások elkészítése és folyamatos karbantartása. Jelentős munkát és kutatást igényel az előírások elkészítése. Az előírások példányait el kell küldeni az összes lehetséges szállítónak és a szállítók által kezdeményezett eltéréseket meg kell tárgyalni, majd össze kell hangolni. A már említett általános előírásoknak (például a MIL-STD-38510-nek [1]) az az előnye, hogy a felhasználónak nem kell folyamatosan felülvizsgálnia és karbantartania költséges előírásait, mivel azokat az általános előírások készítői folyamatosan aktualizálják. Az a berendezés, hogy miért kell 2 X árát fizetnie azért az eszközért, amely minősített, holott X árért kapna a saját előírásának megfelelő terméket, nyilván nem vizsgálta meg, hogy mibe kerül az előírás készítése és így a vásárolandó tételre vonatkozó költségek megnövelik az egyes alkatrészek árát. Ez a gyártó azt sem elemelte, hogy különbség van az általános előírás szerint rögzített termék megbízhatósága és a saját előírása szerinti termék megbízhatósága között. Nem lehetséges ugyanis azonos megbízhatóságú és minőségű eszközöt ugyanazért az árért megkapni, mint az általános előírásoknak megfelelően minősített terméket. A gyártó az általános előírásokból adódó adminisztrációs

költséget több tízezer eszközre tudja terhelni, ugyanakkor a saját előírása szerint rögzített, nem szabványos termék költségeit csak néhány eszközre terhelheti. Így esetleg azonos szűrés esetében sem tud olyan alacsony költséget elérni, mint egy minősített termék esetében.

A harmadik terület, ahol a beszerzéssel kapcsolatos járulékos költségek csökkenthetők, az alkatrészek beszerzési forrásainak ellenőrzése. Ekkor az ellenőrzés minősített termékek esetében az általános előírásoknak való tanúsított megfelelésre hagyatkozik, nem kell külön ellenőrzés. Koordinált programok esetében pedig elegendő forrásonként egy-egy ellenőr a feladat elvégzéséhez.

A költségek kézben tarthatók az idegenárú ellenőrzés területén is. Például ha egy a gyártó telephelyén lévő ellenőr tanúsítja a gyártó alkalmasságát a végellenőrzés elvégzésére, akkor ezeket a végellenőrzési vizsgálatokat és méréseket nem kell megismételni a felhasználó idegenárú ellenőrzése során. Az idegenárú ellenőrzést úgy lehet ezen túlmenően gazdaságossá tenni, hogy az ellenőrzésnek különböző szigorúságú fokozatait különbözteti meg a berendezésgyártónak az idegenárú ellenőrzése. Megbízható szállító esetében csak enyhített mintavételes ellenőrzést végez, nem állandó minőségű terméket szállítók esetében pedig szigorított mintavételes vizsgálatot, illetve mintadarabos ellenőrzést alkalmaz. Ezekhez az ellenőrzési-átvételi eljárásokhoz tartozik a közvetlen raktárra szállítás (ellenőrzés nélkül), illetve a felhasználandó anyagoknak közvetlenül a gyártó sorra való eljuttatása is. Gyakran alkalmazzák az ún. tétel-elhagyásos mintavételt. Ez azt jelenti, hogy pozitív mintavételes eredmények sorozata alapján megszüntetik a tételenkénti mintavételes ellenőrzést és csak hosszabb tételsorozatuként, például minden 10. tétel után ellenőriznek. Ha azonban egy tételt visszautasítanak, akkor visszaállnak a tételenkénti ellenőrzésre addig, amíg egymásután elegendő számú tételt megfelelőnek minősítenek, azaz a szállító által felajánlott minőség ismételtlen állandósult és jónak bizonyult. Másik eljárás az idegenárú ellenőrzés során, hogy több paramétert vizsgálunk és az ellenőrzési tervet egy többszörös mintavételi szint szerint állítják össze. Ekkor az ún. csoportos ellenőrzést végzik, amelynek során ugyanazokat a mintadarabokat több paraméterre vonatkozóan ellenőrzik. Az eljárásból adódik, hogy a mintanagyság csökkenthető, azonban a nagyobb vizsgáló- és mérőeszköz parkra való berendezkedés nagyobb berendezés-költséget jelent. Így lehet, hogy 75 %-os mintanagyság csökkenés csak 10 %-os vizsgálati költségcsökkenést eredményez.

## 9. A félvezető eszközök szűrésének költségei

Ez az a költségterület, amelyre igen nagy figyelmet kell fordítani az alkatrész felhasználójának. Számos olyan tényező befolyásolja az alkatrészarát, amelyet

nagyon gyakran nem vesznek számításba. Ha a gyártó valamilyen vizsgálatot elvégez, akkor a termék eladási árában jelentkező többletköltséget a következő képlettel becsülheti:

Többletköltség = Vizsgálati költség + Alkatrésztérték ·

$$\left(1 - \frac{\text{Kibocsátott mennyiség}}{\text{Összes vizsgált mennyiség}}\right)$$

ahol az alkatrésztérték az alkatrész tényleges értéke a szűrés elvégzése előtt, a vizsgálati költség pedig a szűrővizsgálati lépés elvégzésének költsége. Ez a többletköltség egy alkatrészre vonatkoztatva azt jelenti, hogy a termék gyártási költségéhez és a nyereséghez hozzá kell még adni az egy termékre eső vizsgálati költséget és a kihatással (ld. a képlet zárójelben lévő szorzója) járó egy termékre eső értékvesztést. Például, ha a kibocsátott mennyiség megegyezik az összes vizsgált mennyiséggel, akkor ez a tag nullával egyenlő. Minél kisebb a kibocsátott mennyiség annál nagyobb ez az értékvesztés. Mivel minden szűrővizsgálati lépés eredménye egy adott kihatással, ezek a költségek gyorsan növekednek összeadásuk miatt. A következőkben vizsgáljunk meg néhány olyan tényezőt, amely jelentős hatással van a szűrési költségre.

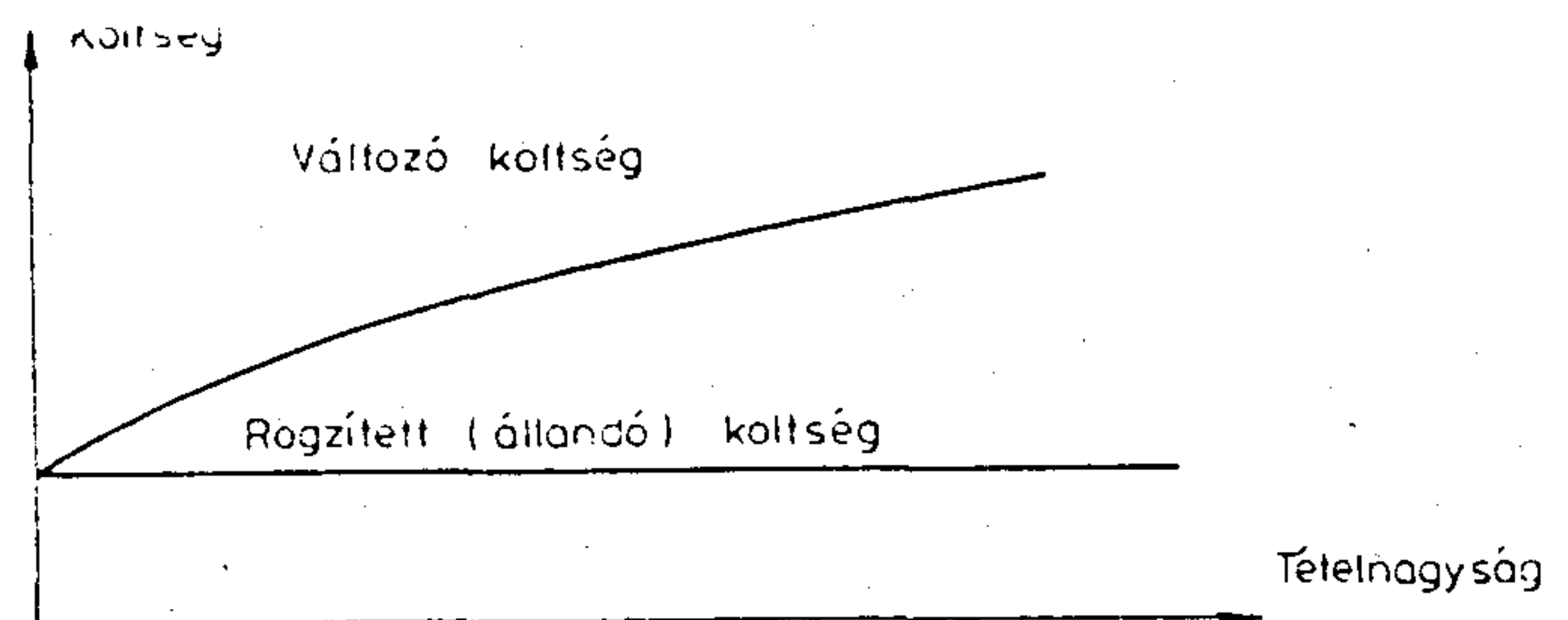
### 9.1 A szűrési költség a tétel nagyság függvényében

Egy adott alkatrésztípus esetén vannak rögzített állandó költségek, amelyek a tétel nagyságtól függetlenek, így például nem fognak változni a tétel nagyság függvényében a következő tevékenységekkel kapcsolatos költségek:

- a bejövő rendelés feldolgozása;
- a megrendelő előírásának felülvizsgálata;
- olyan belső vizsgálati előírás elkészítése, amely megfelel a megrendelő által támasztott követelményeknek;
- az alkatrésztétel mozgatásának költségei a vizsgálat során.

A 7. ábrán látható, hogy azok a költségek, amelyek az egy darab alkatrészre eső költségeket terhelik, jelentős mértékben eltorzítják kis tétel nagyságú megrendelések esetében az előállított alkatrész árát.

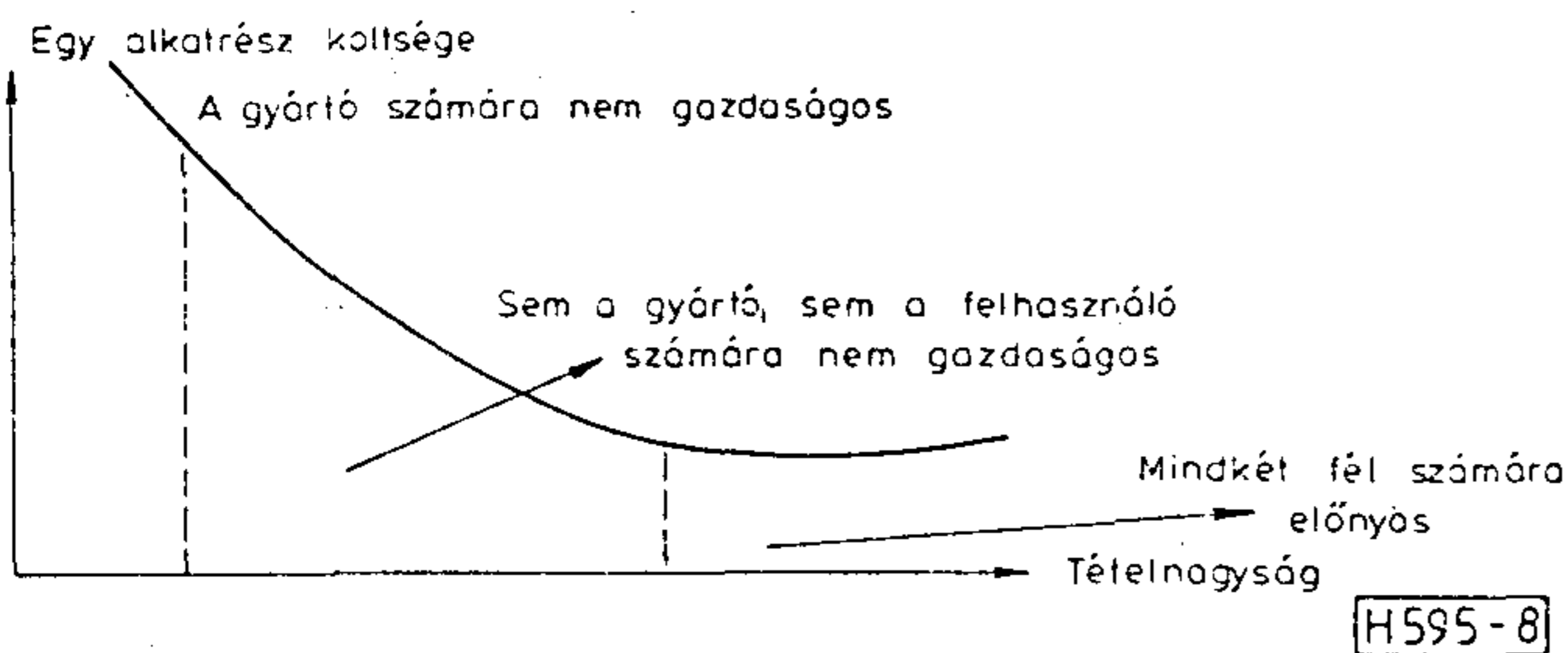
A szabványosítási és minőség tanúsítási programoknak (ilyenek az USA-ban a MIL-38510 szerinti minősítő



7. ábra. Tétel nagyság és költség

H595-7

mind a gyártó számára, hogy ezeknek a programoknak a keretében, az alkatrészgyártó nagy tételeket (gyakran több tízezer eszközt) állít elő és ezeket azután gazdaságosan tudja szállítani kisebb szállítmánytételben a beérkezett megrendelések alapján a vevőknek. A 8. ábrán látható, hogy a tétel nagyság függvényében hogyan változik az egy alkatrésze jutó vizsgálati költség. Látható, hogy az első szakasz (kis tétel nagyság) a gyártók számára elfogadhatatlan, a második szakasz (közepes tétel nagyság) mind a gyártók, mind a felhasználók számára gazdaságtalan, a harmadik szakasz (nagy tételek) már jó megoldást jelent mindkét fél részére.



8. ábra. Tétel nagyság és gazdaságosság

### 9.2 A szűrővizsgálati sorozat és a költség

A gyártó azokat a vizsgálatokat végzi el a leggazdaságosabban, amelyeket már begyakorolt munkaerő hajt végre, tekintettel arra, hogy ezeket a vizsgálatokat szokásosan végzik el. Például a 2. ábrán látható, „B” minőségi osztályhoz tartozó sorozat szokásos, begyakorolt eljárásnak tekinthető és a vizsgálatok elvégzése tanulási görbéjének optimális szakaszát képezi ez a vizsgálati sorozat. Ekkor a vizsgáló személyzet tévedési lehetőségei minimálisak, így a költségek is minimálisak. Ha további vizsgálatokkal egészítjük ki ezt a vizsgálati sorozatot, amely lépések már nem tartoznak a gyártó rutinszerű vizsgálatainak közé, akkor a vizsgáló személyzet ezen a területen már nem begyakorlott, így ezeket a műveleteket már meg kell tanulnia, több hibát követhet el. Ez pedig költségnövekedéshez vezethet, valamint előidézheti a megbízhatóság csökkenését is.

Arra is figyelmet kell fordítani, hogy egyes vizsgálatok – jellegükből adódóan – többbe kerülnek, mint más vizsgálatok. A külső szemrevételezés csak egy viszonylag olcsó kisteljesítményű mikroszkóp használatát teszi szükségessé és egy képzett technikus óránként nagy mennyiség ellenőrzését tudja ellátni. A részecske zajvizsgálat azonban már igen költséges hardware eszköz alkalmazását igényli és a vizsgáló – bármilyen képzett is – nem tud nagy mennyiséget megvizsgálni. Így ez utóbbi vizsgálat sokkal költségesebb a külső szemrevételezésnél.

Az elektromos paraméterek mérése nagyon jó példát ad a lehetséges vizsgálati költségek változására. A sztatikus paraméterek szobahőmérsékleten végzett mérése mérőautomatával lehetővé teszi, hogy nagy

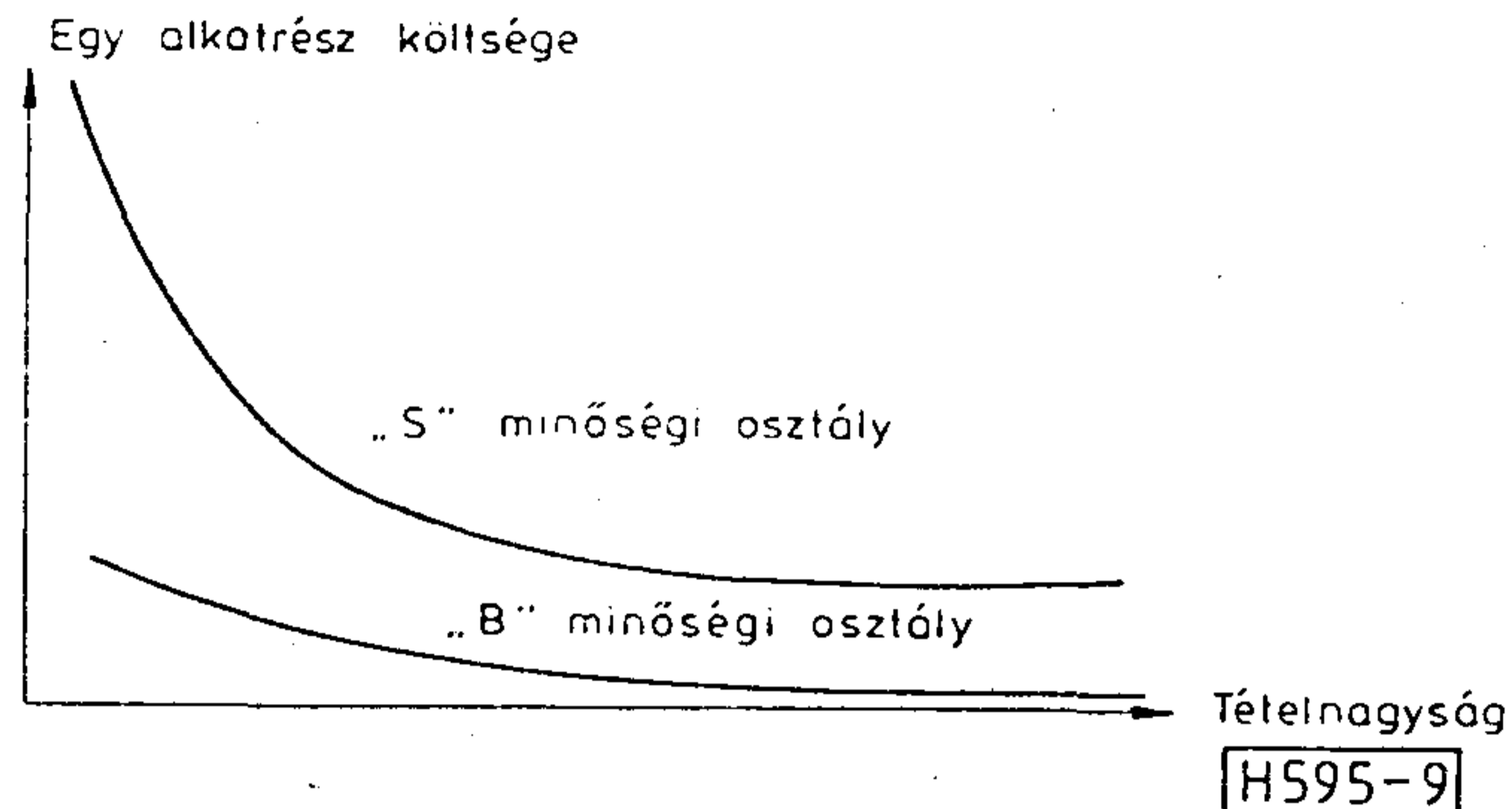
mennyiségben és gyorsan (néhány msec alatt) végzük el a megkövetelt paraméteres és funkcionális vizsgálatot. Ugyanekkor egy olyan vizsgálat, mint például a bemeneti zajfeszültség mérése különböző hőmérsékleteken, már jellegéből következően költséges. Hőkamrát kell ugyanis használni, a mérendő paraméterek pedig érzékenyek olyan külső hatásokra, mint például az alkatrészek a hőkamrán kívül lévő vizsgáló berendezéshez csatlakoztató vezetékek kapacitásértéke és ellenállásértéke. Ez pedig a vizsgálatot nehezíti és lassúvá teszi. Minden egyes alkatrészt kézzel kell mérni, az oszcilloszkópon kijelzett adatokat le kell olvasni és ki kell értékelni. Ezt egy sokkal képzetesebb vizsgáló szakembernek kell elvégezni, mint egy olyan mérést, amelyet egy mérőautomatával lehet végrehajtani.

Ha a vizsgálatokat nem szabványos feltételek között végzük, akkor az jelentős költségtöbbletet jelent. A legtöbb félvezetőgyártó például hőkamráját 150 °C-ra állítja be, amely a MIL-STD-883 és a MIL-STD-38510 (ld. [1], [2]) szerint szabványos hőtartás vizsgálati feltétel. Ha a 200 °C-os hőtartási vizsgálatot kellene véggezni egy tétel esetén, akkor a gyártónak minden más gyártást le kellene állítania és hőkamráját 200 °C-ra kellene állítania csak azért, hogy a kamrát kizárólag ennek az egy tételnek vizsgálatára használja előírt ideig. Ezt követően pedig a hőkamrát vissza kell állítani 150 °C-ra és újra kell hitelesíteni azt 150 °C-ra. Nyilvánvaló, hogy ez nem gazdaságos. Ugyanilyen megállapítások igazak az előégetéses (burn-in) és a hőciklusvizsgálatokra is. Így például, ha a meghibásodási mechanizmusok fellépnek 70 °C és 125 °C hőmérsékleten, gazdasági okok miatt a legtöbb szállító (gyártó) 125 °C-on végzi el a burn-in vizsgálatokat azokon az eszközökön is, amelyekre 70 °C hőmérsékletű előégetést írnak elő. Ez utóbbi esetben ugyan több lesz a hibás alkatrészek száma, az azonban kevésbé költséges, mint a burn-in berendezés átállítása.

A szokásostól eltérő gyártási folyamatok nem gazdaságosak. A gyártó rendszerint gyártósorát egy vagy két gyártási folyamatra állítja be. Ezeket a gyártási folyamatokat a dolgozók megismerik és begyakorolják, a gyártás zökkenésmentesen folyik, a költségek csökkennek. Ha egyedi tétel gyártására kerül sor, amelynek előállítására eltér a szokásostól, az megszakítja a gyártás már jól bevált menetét. Az ebből adódó költségeket a gyártó automatikusan a felhasználóra hárítja át.

Említést kell tenni arról is, hogy különbségek vannak a „B” és „S” minőségi osztályokhoz tartozó szűrővizsgálatok (ld. 2. ábra) költségei között. A 9. ábrán látható, hogy miként változik az egy alkatrésze eső költség különböző tétel nagyságok esetében. A kezdeti pont ezeken a görbéken azokra a tétel nagyságokra vonatkozik, amelyek minimálisan szükségesek ahhoz, hogy a szűrővizsgálatokat egyáltalán el lehessen véggezni. Természetesen az összes tétel költség egy alkatrésze eső része is szerepel a 9. ábrán. A két görbe adatai között lényeges különbség van. Megjegyzendő, hogy

ezek csak azok a költségek, amelyeket az alkatrészgyártó a felhasználóra hárít át, nem tartalmazzák a felhasználó saját költségeit, amelyek valószínűleg szintén nagyak adódnak, például ebből következőleg, hogy egy katonai minőségű („S” osztályú) alkatrész sokkal szélesebb körű dokumentációt igényel a felhasználó telephelyén és magasabb lesz a helyszíni ellenőrzés költsége is.



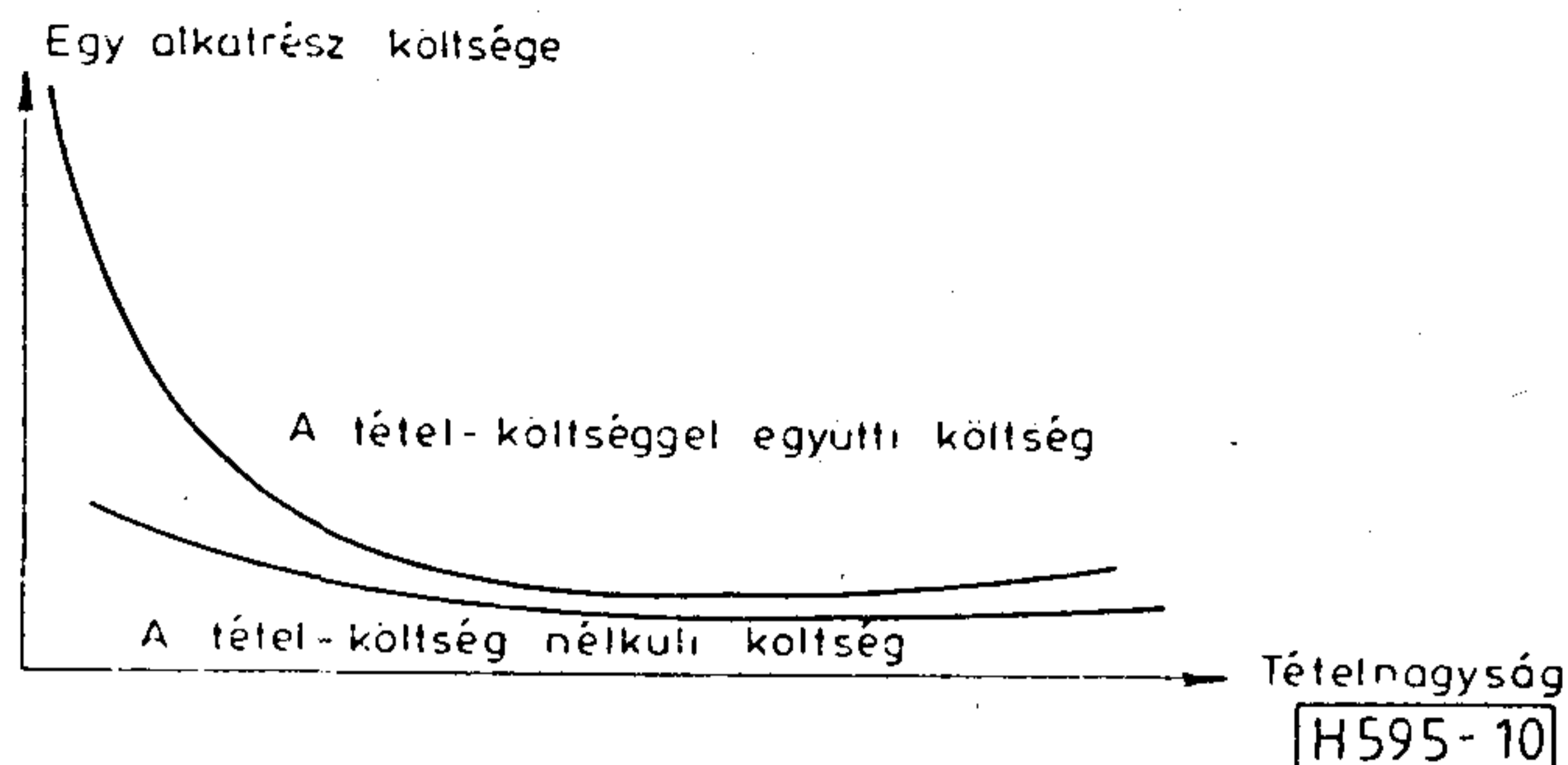
9. ábra. Minőségi osztály, tétel nagyság és költség

Az elektromos paraméterek szerinti válogatás költség kihatását gyakran szintén nem veszik figyelembe. A tervezőmérnökök néha az eszközökkel szembeni követelményeket úgy szigorítják, hogy a rendszer által támasztott igényeket messze túlhaladják. Gyakran feltételezik azt is, hogy ez a paraméterek szerinti válogatás 90 %-os kihozatal esetén az alkatrész-alapárak 10-15 %-os növekedést eredményez. Ez hibás feltételezés, mivel a szűrés költségei teljesen függetlenek az alapártól és ekkor azt sem veszik figyelembe, hogy minden szűrővizsgálati lépés után megváltozik az az érték, amelyre a válogatás költségét vonatkoztatni kell. A 90 %-os kihozatalt eredményező elektromos paraméterek szerinti válogatás függően attól, hogy milyen szűrővizsgálati lépés után végezzük 15-40 %-os költségnövekedést és így árnövekedést eredményezhet a szűrés utáni alkatrészárakra vonatkoztatva. Ha a megrendelt alkatrész mennyiség kicsi, akkor ez a tétel nagyságra vonatkozó megfontolások miatt további árnövekedéshez vezethet. Ezen túlmenően a speciális vizsgálatokra való felkészülés, a vizsgálat és a vizsgálatához szükséges eszközök költségeit is figyelembe kell venni az alkatrész árának kialakításában.

### 9.3 A tételre vonatkozó vizsgálatok költségei

A szűrővizsgálatok elvégzése után ellenőrizni kell a tétel hibaszintjét. Ezért olyan ellenőrző vizsgálatokat kell elvégezni, amelyek alapján a tételt megfelelőnek minősítik, vagy pedig visszautasítják azt az ellenőrzés adatai alapján. Ez pedig további költségkihatást jelent, mivel a tétel visszautasításával járó kockázati tényezők növelik az árat egy olyan taggal, amelyben a visszautasított tételek százaléka szerepel. A szűrési költséget így ezekkel a tételre vonatkozó költségekkel együtt kell kiszámítani és meg kell határozni az egy alkatrész-

re jutó költséget is. Ez látható a 10. ábrán a tétel nagyság függvényében. Az a felhasználó, amely igényt tart ezekre a megfelelőség-ellenőrző tételvizsgálatokra, tudomásul veszi, hogy ez költségeit jelentősen megnöveli.



10. ábra. Tétel nagyság, tétel költség és egy alkatrész költsége

### 10. További szűrővizsgálatok költségének elemzése

Több esetben az eszköz gyártásának kiforratlansága, vagy bonyolultsága miatt az előrejelzési számítások arra utalnak, hogy további szűrővizsgálatokat kell elvégezni megbízhatósági célok (MTBF értékek) elérése érdekében. Ahhoz azonban, hogy milyen további szűréseket kell elvégezni, a MIL-HDBK 217 kézikönyv [7] nem nyújt segítséget, mert nem adja meg az egyes szűrővizsgálatokhoz tartozó minőségi tényezőket, valamint azt sem közli, hogy mibe kerül egy-egy vizsgálat. Az alkatrész felhasználójának kell döntenie arról, hogy milyen további gazdaságos elvégezhető vizsgálatokkal kívánja biztosítani a megbízhatósági célértéket.

A következőkben azt a képletet alkalmazzuk, hogy a vizsgálatok összes költségnövekményének, azaz  $\Delta\Sigma C_v$ -nek és az összes javítási költség csökkenésnek, azaz  $\Delta\Sigma C_j$ -nek egyenlőnek kell lennie (illetve a vizsgálati költségnövekedés nem haladhatja meg a javítás költségcsökkenést). Példaként tekintsük a következő esetet (ez illusztrációs példa így a benne szereplő szám adatok az eljárás megvilágítására szolgálnak, nem alkalmazhatók közvetlenül más gyakorlati esetekben): a rendszer egy adott integrált áramkör típusból 2000 darab eszközt tartalmaz, egy áramkör meghibásodása esetén a rendszer javítási költsége – a kiesés miatti állási veszteséget is figyelembe véve – 30 000 Ft. A rendszer tervezett élettartama 24 000 óra (közelítőleg 3 év), a rendszer MTBF értéke 3000 óra. Így a rendszer tervezett élettartama alatt 8 meghibásodás fordul elő, azaz az összes javítási költség 240 000 Ft. Ha a rendszer MTBF értékét további szűréssel 400 órára növelnénk, akkor az élettartam alatt csak 6 meghibásodás fordulna elő és így a javítások költsége 180 000 Ft-ra csökkenne. Ez azt jelenti, hogy a javítási költség csökkenése  $\Delta\Sigma C_j = 60 000$  Ft. Így a további vizsgálat akkor gazdaságos, ha annak költségnövekményére az teljesül, hogy

$$\Delta\Sigma C_v = 60 000 \text{ Ft.}$$

Ha az adatok azt mutatják, hogy egy előégetés elvégzése az MTBF-t 4000 órára növeli és az egy alkatrésze-re eső vizsgálati költség 30 Ft, akkor 2000 eszköz esetében

$$\Delta\Sigma C_v = 2000 \times 30 = 60\,000 \text{ Ft}$$

azaz a feltétel teljesül. Ezzel azonban nem fejeződik be a felhasználó költségelemzése. Például az adódik, ha egy mikroszkopikus szemrevételezéses ellenőrzés sokkal olcsóbban végezhető el, (eszközóránként 15 Ft költséggel), akkor

$$\Delta\Sigma C_v = 2000 \times 15 = 30\,000 \text{ Ft}$$

költségű vizsgálat biztosíthatja az MTBF = 4000 órás érték elérését.

## 11. Következtetések

A félvezető eszközök adott megbízhatósági szintjének biztosítására az eszközök felhasználójának meg kell határozni azokat a költségtényezőket, amelyek mellett gazdaságos és hatékony a szűrővizsgálatok elvégzése. Az eszközt felhasználó berendezésgyártónak ennek a döntésnek az alkalmával figyelembe kell vennie a következő tényezőket: az eszköz gyártásának ki-

forrottsága, az eszköz minőségi osztálya és megbízhatósága közötti összefüggés, a szokásos szűrővizsgálati eljárások és az ezektől eltérő vizsgálatok költségei közötti különbség. A rendszertervezőnek megbízhatóságnövelő tevékenysége során arra kell törekednie, hogy a vizsgálati költségnövekmény és a javítási költségcsökkenés azonos legyen.

## Irodalom

- [1] MIL-SM-38510: General Specification for Microcircuits (1976)
- [2] MIL-STD-883: Test Methods and Procedures for Microelectronics (1983)
- [3] CECC 90000: Generic Specification for Monolithic Integrated Circuits (1976)
- [4] CECC 00107: Quality assessment procedures (1983)
- [5] IEC 747-10 Publikáció: Generic specification for discrete semiconductor device and monolithic circuits (1984)
- [6] IEC 747-11 Publikáció: Sectional specification for discrete semiconductor devices (1985)
- [7] MIL-HDBK-217E: Reliability Prediction of Electronic Equipment (1986)
- [8] Balogh, A. - Gerlai, M.: Rendszerek megbízhatósági tervezése, Híradástechnika XXXVI. 2. sz. (1985) 70-90 old.

# NÍVÓDÍJASAINK

A HÍRADÁSTECHNIKA SZERKESZTŐBIZOTTSÁGA 1990. július 4-én rendezte meg az idei Nívódíjak átadását.

Évtizedek óta megszokott hagyományos ünnepélyességet teljesen mellőzve a legszűkebb körben gondokkal és nehézségekkel teli jelen idő és a folyóirat jövőbeni sorsa foglalkoztatta a jelenlevőket. Milyen módon tudjuk megteremteni a gyökeresen átalakuló ipari környezetben megújulásra váró szaklapunk gazdasági feltételeit? Világosan látható, hogy jelenleg a kiadók és nyomdák számára nem üzlet a tudományos folyóirat megjelentetése.

Minden nehézség ellenére továbbra is azon kell fáradoznunk, hogy a szükséges támogatást elnyerve a folyóirat megjelenésének folyamatosságát biztosítani tudjuk. Szakembereinket érdekeltté kell tennünk, hogy minél értékesebb cikkek írásával szolgáljuk iparágunk fejlődését.

Ezekkel a gondolatokkal adta át dr. Tófalvi Gyula főszerkesztő a jutalmazásra érdemesnek ítélt cikkek íróinak az 1989. évi nívódíjakat.

### BHG rovat

Dr. Szépvölgyi Gábor: URH-FM adóberendezések (1989/6. szám)

Dr. Darabos Zoltán: A szolgáltatások szerepe (1989/9. szám)

Dr. Szabó Pál -

Szabó Zoltán: TV IV-V. sávi adóantenna rendszerek (1989/10. szám)

### TKI rovat

Dr. Fülöp Tamás: Kapcsolt kapacitású áramkörök offset - érzéketlen realizálása (1989/6. szám)

Dr. Elekes József: Transzmultiplexerek tervezési problémái (1989/2. szám)

Dr. Ladvánszky János -

Dr. Frigyes István: Nemlineáris mikrohullámú áramkörök teljesítményillesztése (1989/3. szám)

### MEV rovat

Hosszú Gábor: Módszerek a nagy bonyolultságú IC-k kihozatalának becslésére a gyártási eljárás szimulációjával (1989/8. szám)



## BERUHÁZÁS HELYETT – KÖLCSÖNÖZZÖN MŰSZERT



**csak egy telefon: 181-0903**

**ÉS MÁRIS** hozzájuthat a legkorszerűbb precíziós műszerekhez! **MEGTÉRÜL A KÖLCSÖNDÍJ,** mert: a megfelelő időszakban rendelkezésre álló, **MÉRÉS AUTOMATIZÁLÁSRA** is alkalmas korszerű műszerek használatával időt, munkaerőt, adót, amortizációs költségeket, javítási-karbantartási költséget takarít meg. **NE FELEDJE,** egy műszer haszna a mérésekből, nem pedig a tulajdonjogból ered! **NE SZAPORÍTSA KIHASZNÁLATLAN ESZKÖZEIT!**

**ÓRIÁSI VÁLASZTÉK,** oszcilloszkópok, multiméterek, jelgenerátorok, analizátorok, mérésadatgyűjtők, regisztrálók, analitikai-környezetvédelmi műszerek, rendszervezérlők, stb.

**ÁLL AZ ÖN RENDELKEZÉSÉRE.**

Fogyóanyag, tartozék-pótlás ugyancsak forintért!

**LÍZING LEHETŐSÉG:** egyes műszer vagy számítógép típusokra!

**SZAKTANÁCSADÁS – HÁZHOZSZÁLLÍTÁS – BEMUTATÁS!**

**KÉRJE INGYENES KÖLCSÖNMŰSZER KATALÓGUSUNKAT!**

**FELVILÁGOSÍTÁS, ELŐJEGYZÉS, ÜGYINTÉZÉS: 181-0903 vagy 166-2366/176**  
telefonszámokon.



**MTA MŰSZERÜGYI ÉS MÉRÉSTECHNIKAI  
SZOLGÁLAT MŰSZERKÖLCSÖNZÉSI FŐOSZTÁLY**  
Budapest XI., Szakasits Á. út 59–61. I. em. 107. szoba  
H-1502 Budapest, Postafiók 58

# A két- és többdimenziós Fourier sor és Fourier integrál (I. rész)

CEBE LÁSZLÓ

Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola

## Összefoglalás

Cikkünk első részében a szinusz függvények két- és többdimenziós változatával foglalkozunk. Ezek alapján tárgyaljuk a két- és többdimenziós periodikus függvények Fourier sorát majd a két- és többdimenziós aperiodikus függvények Fourier integrálját. A matematikának ez a kevésbé ismert része alapvető fontosságú a hullámtanban és a fizika számos egyéb területén. Cikkünk második részében röviden kitérünk a többdimenziós Dirac impulzusra és a többdimenziós mintavételező függvényre. Ezeknek különös jelentősége van az egyre jobban tért hódító digitális képfeldolgozásban.

## Bevezető

A fizikai problémák nagy része egydimenziós jellegű, csak egy független változó van, ami rendszerint az idő vagy a távolság. De sok fizikai probléma eleve többdimenziós tárgyalásmódot kíván. Ilyenek például egyes optikai jelenségek, a folyadékok és gázok áramlása, a hőterjedés, az elektromágneses hullámok terjedése, stb. Mindezeknek a problémáknak a tárgyalása szükségessé teszi a Fourier analízis több dimenzióra való kiterjesztését.

Amint az egydimenziós Fourier analízis alapja az egyszerű elemi szinusz függvényekre való felbontás, úgy a többdimenziós Fourier analízis alapja a többdimenziós szinusz függvényekre való felbontás.

### 1. A kétdimenziós szinusz függvény

Az egydimenziós szinusz függvény, ha a független változó idő illetve távolság dimenziójú:

$$f(t) = A \cos(\omega t - \varphi) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi\right) \quad (1.a)$$

illetve:

$$f(x) = A \cos(\omega_x x - \varphi) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \varphi\right) \quad (1.b)$$

ahol:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  [rad/s] illetve:  $\omega_x = \frac{2\pi}{\lambda}$  a körfrekvencia,

$T$ [s] és  $\lambda$ [m] pedig egyetlen periódus ideje illetve hossza. Az  $\omega_x$  jelölés helyett gyakran „ $k$ ” vagy „ $k_x$ ” jelölést használnak. Így:

$$f(x) = A \cos(kx - \varphi) = A \cos(k_x x - \varphi) \quad (1.c)$$



CEBE LÁSZLÓ

1950-ben végzett a BME villamosmérnöki karán. Az egyetem elvégzése után a BHG átviteltechnikai osztályára került, majd az 1952-ben megalakult átviteltechnikai fejlesztési osztályra. Ezen az osztályon dolgozott a BHG-ben, majd az ágazat átprofilizálása után a Telefongyárban egészen 1987-ig, nyugdíjba vonulásáig. 1978 óta a KKVMF Híradásipari intézetének a tanára. Számos cikket publikált és a főiskola részére megírta az „Átviteltechnika” és a „PCM Hírközlés” című jegyzeteket. Jelenleg a „Fénytvöközlés” jegyzete van nyomdában. Oktatási problémákkal, az oktatás reformjával is foglalkozik. Jelen cikk egy tervezett nagyobb tanulmány egy fejezetének rövidített kivonata.

lakult átviteltechnikai fejlesztési osztályra. Ezen az osztályon dolgozott a BHG-ben, majd az ágazat átprofilizálása után a Telefongyárban egészen 1987-ig, nyugdíjba vonulásáig. 1978 óta a KKVMF Híradásipari intézetének a tanára. Számos cikket publikált és a főiskola részére megírta az „Átviteltechnika” és a „PCM Hírközlés” című jegyzeteket. Jelenleg a „Fénytvöközlés” jegyzete van nyomdában. Oktatási problémákkal, az oktatás reformjával is foglalkozik. Jelen cikk egy tervezett nagyobb tanulmány egy fejezetének rövidített kivonata.

$k$ -át hullámszámnak nevezzük, megadja az egységnyi hosszra eső periódusok számának a  $2\pi$ -szeresét. (Az egységnyi hosszra eső periódusok számát is hullámszámnak nevezzük és a fizika számos területén gyakran használják a  $k = 1/\lambda$  jelölést. Ezért az irodalom olvasásánál mindig célszerű tisztázni, hogy mit jelöl a szerző  $k$ -val).

Értelmezzük illetve terjesszük ki a szinusz függvényt kétdimenzióra. Kézenfekvőnek látszik a második „ $y$ ” dimenziót az alábbi módon bevezetni:

$$z = f(x, y) = A \cos(k_x x + k_y y - \varphi). \quad (2)$$

Két változós függvényről lévén szó,  $f(x, y)$  egy felületet ír le. A felület geometriai ábrázolása nehézségeket okoz, ezért a felületeket metszetekkel vagy szintvonalakkal szoktuk szemléltetni. Például ha  $x = x_i$  konstans, akkor az egyes metszetek:

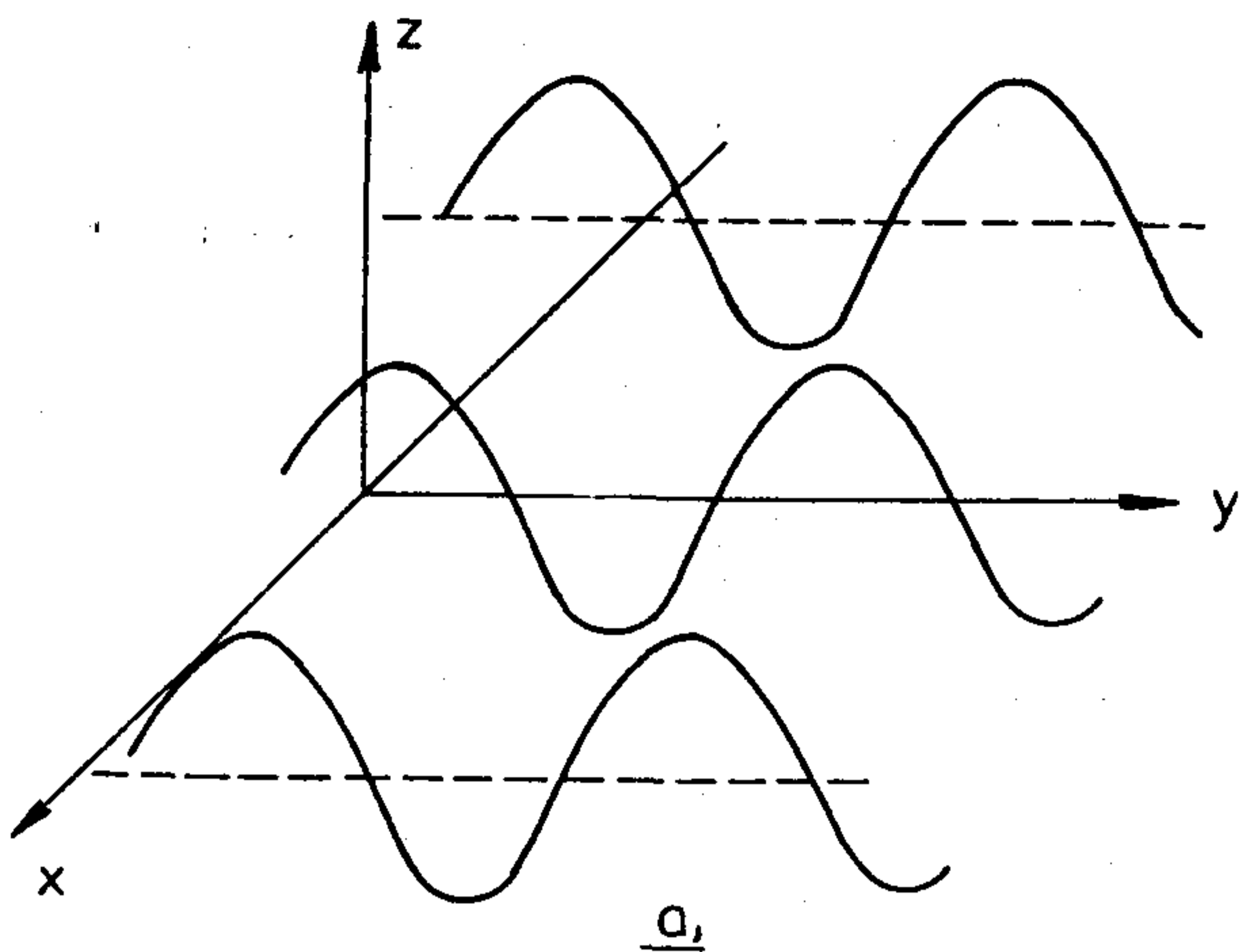
$$[f(x, y)]_{x=x_i} = A \cos(k_y y - \varphi_i), \quad \text{ahol: } \varphi_i = k_x x_i - \varphi$$

Tehát minden metszet „ $A$ ” amplitúdójú és  $\lambda_y = 2\pi/k_y$  hullámhosszúságú egydimenziós szinusz függvény. Néhány ilyen metszetet az 1.a. ábra tüntet fel. Teljesen hasonlóan az  $y = y_i$  konstanshoz tartozó metszetek „ $A$ ” amplitúdójú,  $\lambda_x = 2\pi/k_x$  hullámhosszúságú szinusz függvények. Mindkét esetben a szinusz függvények fázisa  $x_i$  illetve  $y_i$  vel lineárisan változik.

A szintvonalakat, vagyis a  $z = \text{konstans}$ hoz tartozó vonalakat a 2. formulából

$$k_x x + k_y y - \varphi = C \text{ konstans}$$





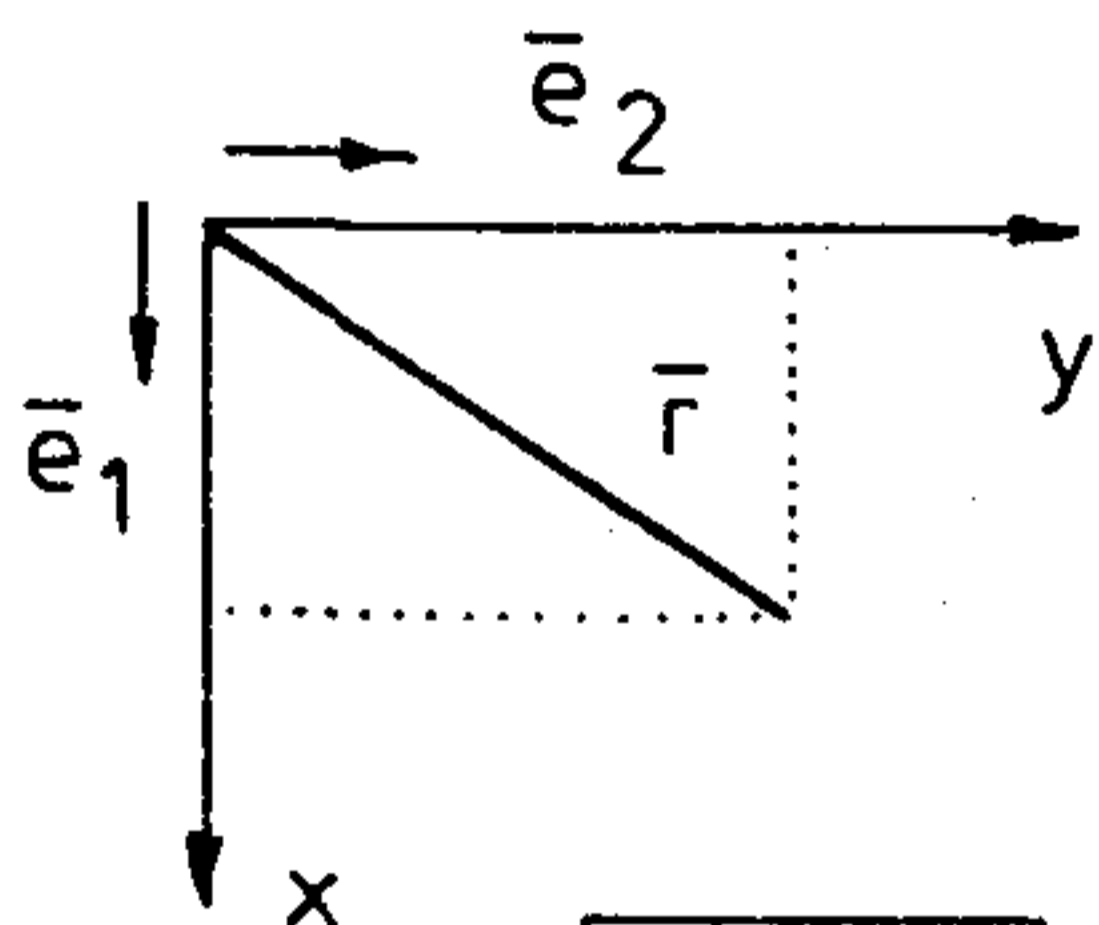
1. ábra:  $Az = A \cos(K_x X + K_y Y - \varphi)$  függvény

egyenlőségből kapjuk. A fenti egyenlőség az  $x, y$  síkon párhuzamos egyeneseknek felel meg. A „b” ábrában feltüntettük, hogy a 2. formula szerinti kétdimenziós szinusz függvénynek az  $x, y$  síkon milyen egyenes mentén van minimuma, maximuma és zérus helye.

$$C = (2r+1)\frac{\pi}{2}, r=0, \pm 1, \pm 2 \dots \text{ esetén: } z=0$$

$$C = 2r\pi \quad r=0, \pm 1, \pm 2 \dots \text{ esetén: } z = +A(\text{maximum})$$

$$C = (2r+1)\pi \quad r=0, \pm 1, \pm 2 \dots \text{ esetén: } z = -A(\text{minimum})$$

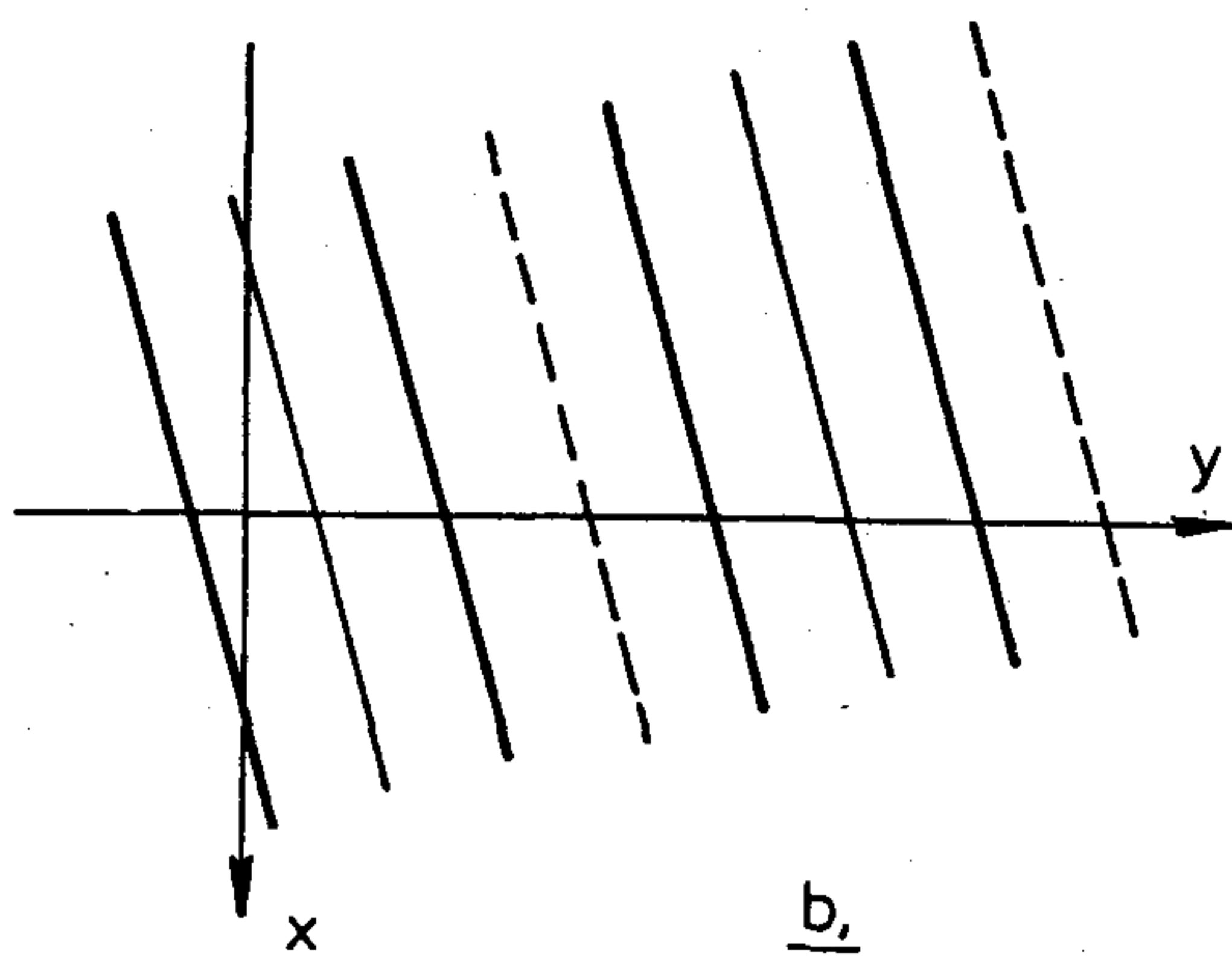


H596-2

2. ábra: Koordinátarendszer

a) A hullámvektor. Két- és többdimenziós problémáknál célszerű vektorokkal számolni. Az  $x, y$  síkban az egyes pontokhoz tartozó vektorok, a 2. ábra jelöléseivel:

$$\vec{r} = \vec{e}_1 x + \vec{e}_2 y$$



$\text{---}$  Zérus helyek  
 $\text{---}$  Maximum "  
 $\text{---}$  Minimum "

H596-1

ahol  $\vec{e}_1$  és  $\vec{e}_2$  az  $x, y$  irányú egységvektorok. (Nem a szokásos  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  jelölést használjuk, mert a hullámszámot is „k”-val jelöljük).

Vezessük be a  $\vec{k}$  hullámvektort:

$$\vec{k} = \vec{e}_1 k_x + \vec{e}_2 k_y \quad (3)$$

A hullámvektor abszolút értéke:

$$|\vec{k}| = k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

A  $\vec{k}$  és az  $\vec{r}$  vektorok skaláris szorzata:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y$$

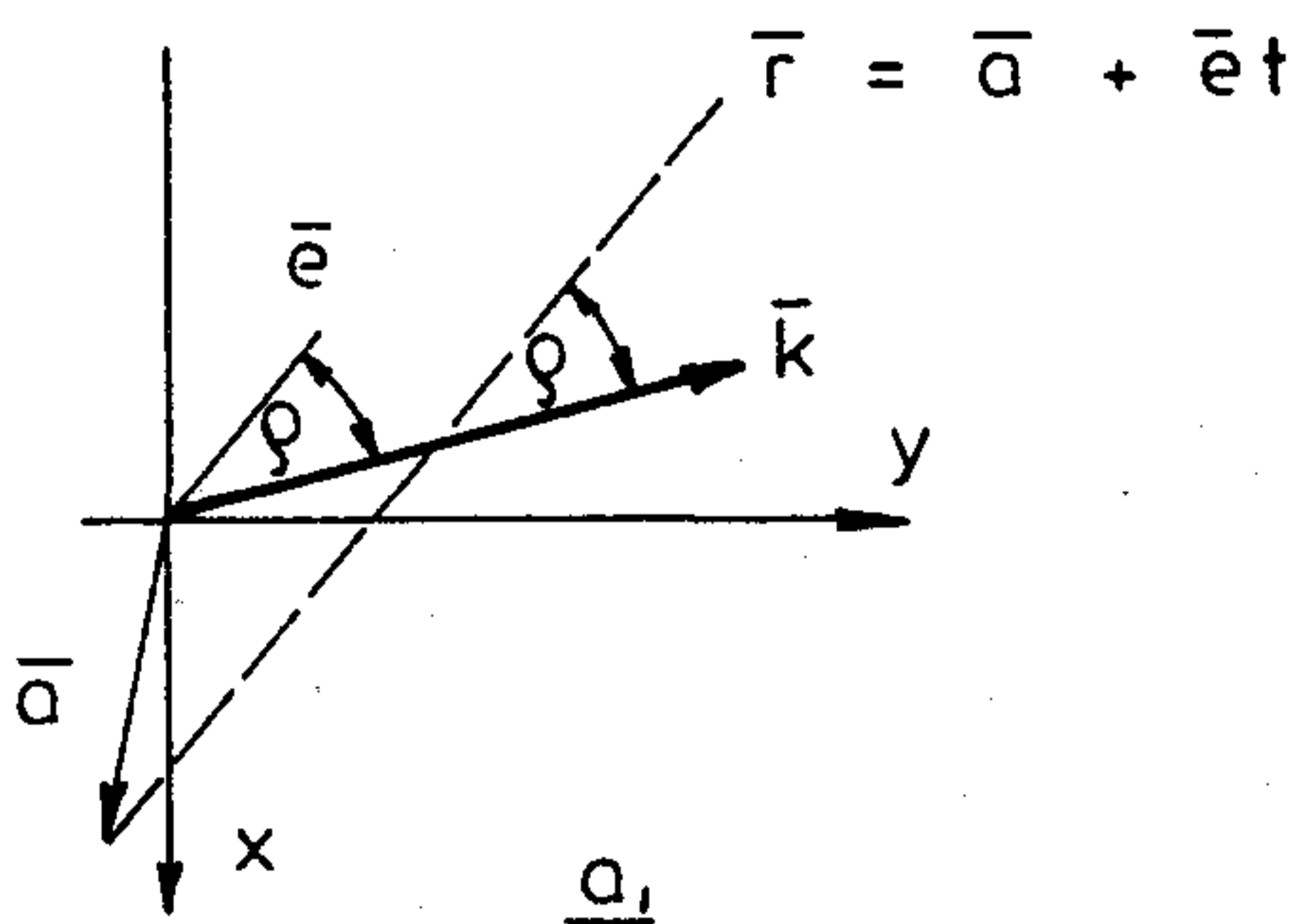
A kétdimenziós szinusz függvény 2. formula szerinti kifejezésében éppen a fenti skalár szorzat áll. Tehát írhatjuk:

$$z = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi) \quad (4.a)$$

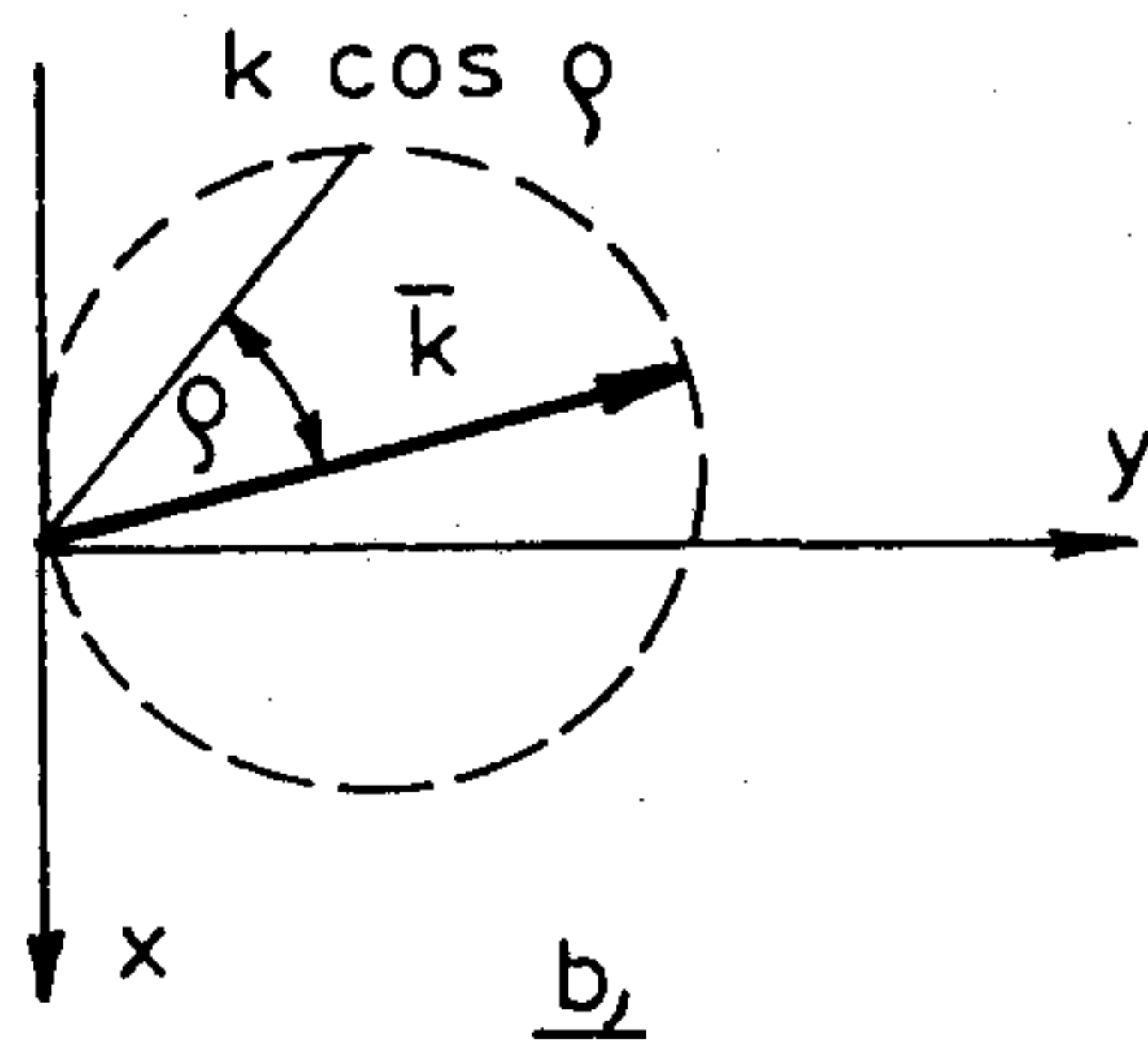
A hullámteremben általában a fenti tömör írásmódot használjuk. A fenti formulával könnyen választ kapunk arra, hogy milyen alakú lesz „z” egy az  $x, y$  síkban lévő egyenes mentén. Legyen az egyenes egyenlete az  $x, y$  síkban:

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{e} t$$

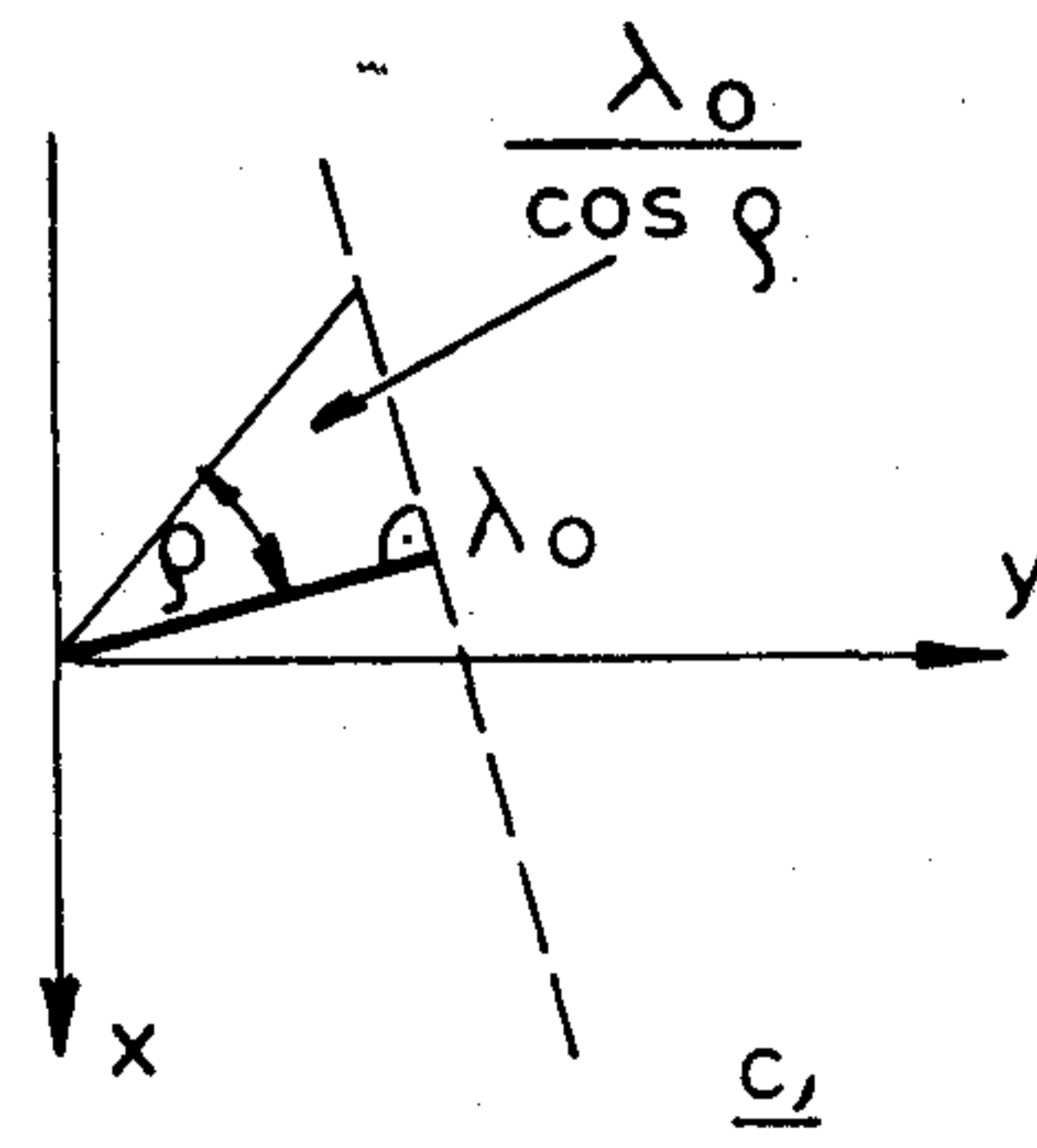
3. ábra: A hullámhossz és a hullámhossz változása  $\zeta$  függvényében



a)



b)



c)

H596-3

ahol  $\bar{a}$  az egyenes egy pontja és  $\bar{e}$  az egyenes irányába mutató egységvektor, „t” pedig a paraméter. A 3.a ábrában tüntetjük fel az x,y síkot az egyenessel és a  $\bar{k}$  vektorral. Helyettesítsük be az egyenes egyenletét 4-be:

$$[f(x,y)]_e = f(t) = A \cos[\bar{k}(\bar{a} + \bar{e}t) - \varphi] = \\ = A \cos(\bar{k} \cdot \bar{e}t + \bar{k} \cdot \bar{a} - \varphi) = A \cos(k_e t - \varphi_e).$$

Azt a fontos eredményt kaptuk, hogy bármely irányú egyenes mentén  $f(z)$  metszete egy „A” amplitúdójú szinusz függvény, amelynek a hullámszáma:

$$k_e = \bar{k} \cdot \bar{e} = k \cos \sigma$$

ahol:  $\sigma$  a  $\bar{k}$  és az  $\bar{e}$  vektor közötti szög és a hullámhossz:

$$\lambda_e = \frac{2\pi}{k_e} = \frac{2\pi}{k \cos \sigma} = \frac{\lambda_0}{\cos \sigma}, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi}{k}$$

ahol  $\lambda_0$  a  $\bar{k}$  irányba eső hullámhossz és a kezdő fázis az  $\bar{a}$  vektor végpontjától számítva:

$$\varphi_e = \bar{k} \cdot \bar{a} - \varphi$$

$k_e$  és  $\lambda_e$  formulái megfelelnek a 3.b,c ábrák szerkesztéseinek. A „b” ábrában a  $\bar{k}$  vektorra mint átmérőre egy kört rajzoltunk. Húzzunk az origóból  $\bar{k}$ -hoz képest  $\sigma$  szög alatt egy egyenest. Az origó és a kör metszéspontja közötti távolság megadja  $k_e$ -ét, vagyis a hullámszámot az illető irányban. Hasonlóképpen a „c” ábra szerkesztése alapján kapjuk meg a hullámhosszat az illető irányban. Látszik, hogy  $\bar{k}$  valóban vektor, mert egy adott irányban  $k_e$ -ét a  $\bar{k}$  vektornak az ebbe az irányba eső komponense adja. Ezzel szemben  $\lambda$  nem vektor. Javasoljuk az olvasónak, hogy  $k_e$  és  $\lambda_e$  szerkesztését 1.b ábrában is végezze el. A kétdimenziós szinusz hullámot jól szemlélteti a vízben a hajót követő „V” hullám egyik szára, ha azt egy adott pillanatban megdermedve képzeljük. A hullámhossz a  $\bar{k}$  irányban a legkisebb,  $\lambda_0$  értékű.

b) *A komplex írásmód.* Az egydimenziós szinusz függvényekhez hasonlóan a kétdimenziós szinusz függvényeket is felírhatjuk komplex alakban:

$$\cos(k_x x + k_y y - \varphi) = \operatorname{Re}[e^{j(k_x x + k_y y - \varphi)}] = \operatorname{Re}[e^{j(\bar{k} \cdot \bar{r} - \varphi)}] \quad (4.b)$$

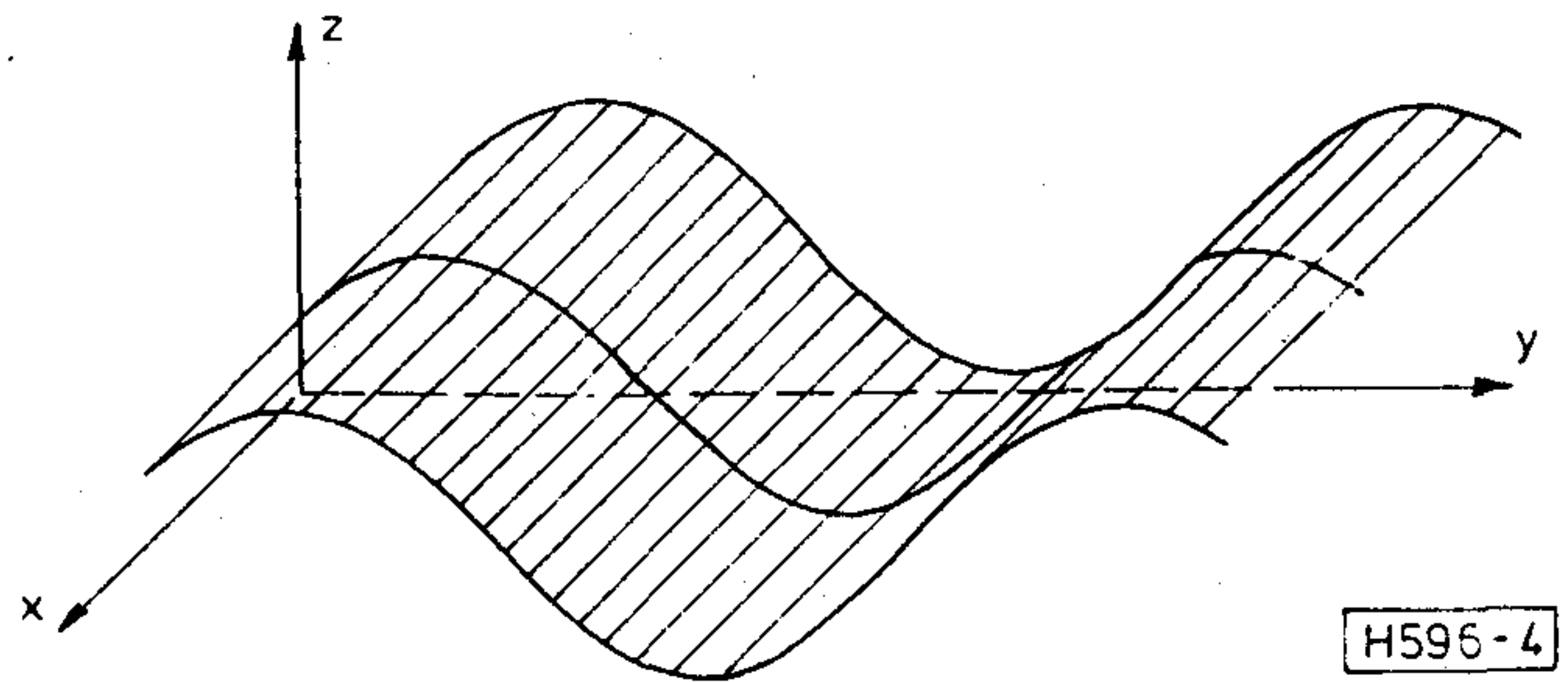
vagy pedig csak röviden  $e^{j(\bar{k} \cdot \bar{r} - \varphi)}$ -it írjuk, ahol mindig csak a valós részt vesszük számításba.

Itt jegyezzük meg, hogy a

$z = A \cos(k_x x - \varphi)$  illetve:  $z = A \cos(k_y y - \varphi)$  függvények szintén két változós függvények, csupán  $k_y$  illetve  $k_x$  zérus értékű. A 4. ábra tünteti fel a második esetet.

A másik megjegyzésünk az, hogy bár  $k$  vektor mennyiség, ez nem jelenti azt, hogy  $k_1$  és egy  $k_2$  hullámvektorú hullámot összegezve, eredőül egy  $k = k_1 + k_2$  hullámvektorú hullámot kapunk. Ugyanis:

$$\cos k_x x + \cos k_y y \neq \cos(k_x x + k_y y)$$



H596-4

4. ábra:  $A z = A \cos(k_y y - \varphi)$  függvény

A vektoriális felbontás egy adott hullám különböző irányú metszeteire vonatkozik.

c) *A kétdimenziós szinusz-szorzat függvények.* Alkalmazzuk a 2. formulára az alábbi trigonometrikus képleteket:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta \mp \cos \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned} \quad (5.a)$$

Rövid számolás után kapjuk:

$$\begin{aligned} \cos(k_x x + k_y y - \varphi) &= \cos \varphi \cdot \cos k_x x \cdot \cos k_y y - \\ &\quad - \cos \varphi \cdot \sin k_x x \cdot \sin k_y y + \\ &\quad + \sin \varphi \cdot \sin k_x x \cdot \cos k_y y + \\ &\quad + \sin \varphi \cdot \cos k_x x \cdot \sin k_y y \end{aligned} \quad (5.b)$$

Amint látjuk, a  $\cos(k_x x + k_y y - \varphi)$  függvény felbontható négy szorzat-függvényre. A továbbiakban az

$$\begin{aligned} s_1(x, y) &= \cos k_x x \cdot \cos k_y y && (f_{22}(x, y) \text{ típus}) \\ s_2(x, y) &= \sin k_x x \cdot \sin k_y y && (f_{11}(x, y) \text{ típus}) \\ s_3(x, y) &= \sin k_x x \cdot \cos k_y y && (f_{12}(x, y) \text{ típus}) \\ s_4(x, y) &= \cos k_x x \cdot \sin k_y y && (f_{21}(x, y) \text{ típus}) \end{aligned} \quad (5.c)$$

függvényeket szintén alapvető kétdimenziós szinusz függvényeknek tekintjük. Elfajuló esetben, ha  $k_x = 0$  vagy  $k_y = 0$  vagy  $k_x = k_y = 0$  akkor a

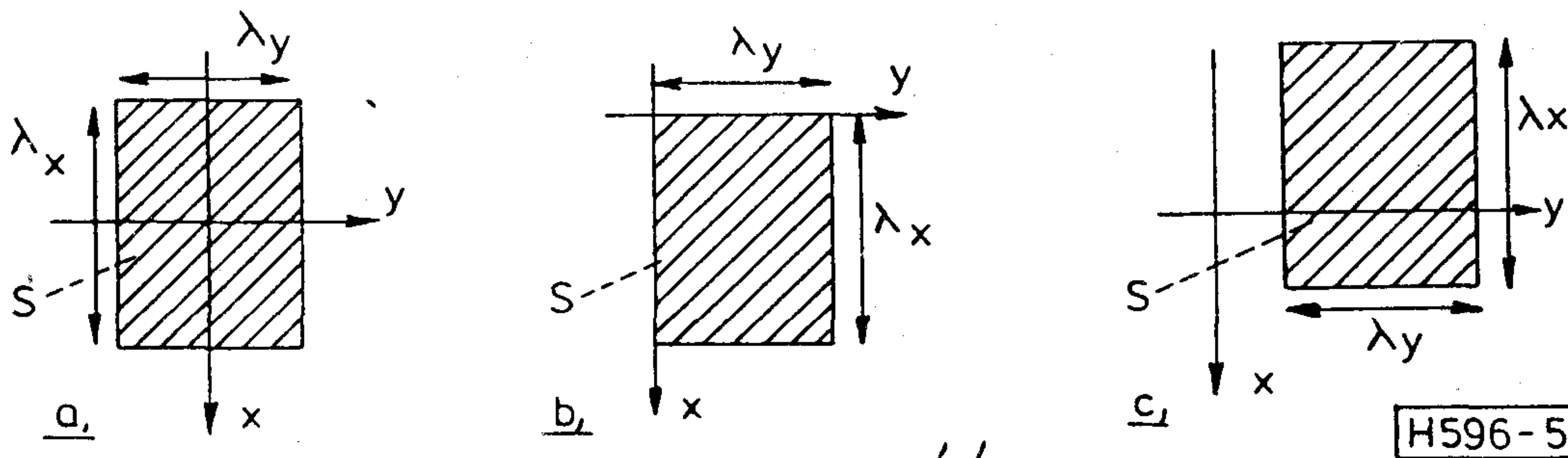
$$\cos k_x x, \cos k_y y, \sin k_x x, \sin k_y y, \text{ és „1”} \quad (5.d)$$

függvényeket kapjuk. Ügyeljünk arra, hogy ezek is kétdimenziós függvények, csupán az egyik változótól függetlenek. A  $z=1$  függvény pedig egy a  $z=1$  magasságban lévő síkot jelent.

Javasoljuk az olvasónak, hogy próbálja meg ábrázolni az 5.c formulák valamelyik  $s(x, y)$  függvényét. Ezek a függvények minden  $x=x_i$  vagy  $y=y_i$  metszet mentén szinusz alakúak. De bármilyen más, az x,y síkban lévő egyenes mentén vett metszet nem szinusz alakú és esetleg nem is periodikus! Ez könnyen igazolható, ha bármelyik  $s(x, y)$  függvényben például „y” helyébe az egyenes egyenletét,  $y = ax + b$  helyettesítjük.

d) *Az ortogonalitás.* Definiáljuk először az ortogonalitás fogalmát. A kétdimenziós  $s_1(x, y), s_2(x, y), s_3(x, y) \dots$  függvénytartomány ortogonális rendszert képez az x,y sík egy S tartományában, ha erre a tartományra:

$$\iint_S s_i(x, y) \cdot s_k(x, y) \, dx dy \begin{cases} = 0, & \text{ha } i \neq k \\ \neq 0, & \text{ha } i = k \end{cases} \quad (6.a)$$



5. ábra: Ortogonalitási tartományok

H596-5

Könnyen igazolható, hogy az 5.c függvények ortogonális rendszert képeznek az  $x,y$  sík bármely téglalap alakú tartományában, amelynek a hossza az „ $x$ ” illetve az „ $y$ ” irányban  $\lambda_x = 2\pi/k_x$  illetve  $\lambda_y = 2\pi/k_y$ . Az 5. ábrán három ilyen tartományt tüntetünk fel. Egy ilyen tartományra érvényesek az alábbi összefüggések (a tartomány határait az egyszerűség kedvéért a „b” ábrának megfelelően vettük fel):

Ha  $k_x \neq 0$  és  $k_y \neq 0$ :

$$\int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} s_i(x, y) \cdot s_j(x, y) dx dy = \begin{cases} \lambda_x \lambda_y & \nearrow 0, \text{ ha } i \neq j \\ \frac{\lambda_x \lambda_y}{4}, & \text{ ha } i = j \end{cases} \quad (6.b)$$

Elfajuló esetben, ha  $k_x = 0$  vagy  $k_y = 0$ :

$$\int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} \cos^2 k_x x dx dy = \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} \sin^2 k_x x dx dy = \frac{\lambda_x \lambda_y}{2} \quad (6.c)$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha  $k_x$  helyett  $k_y$  szerepel.

Ha  $k_x = k_y = 0$ :

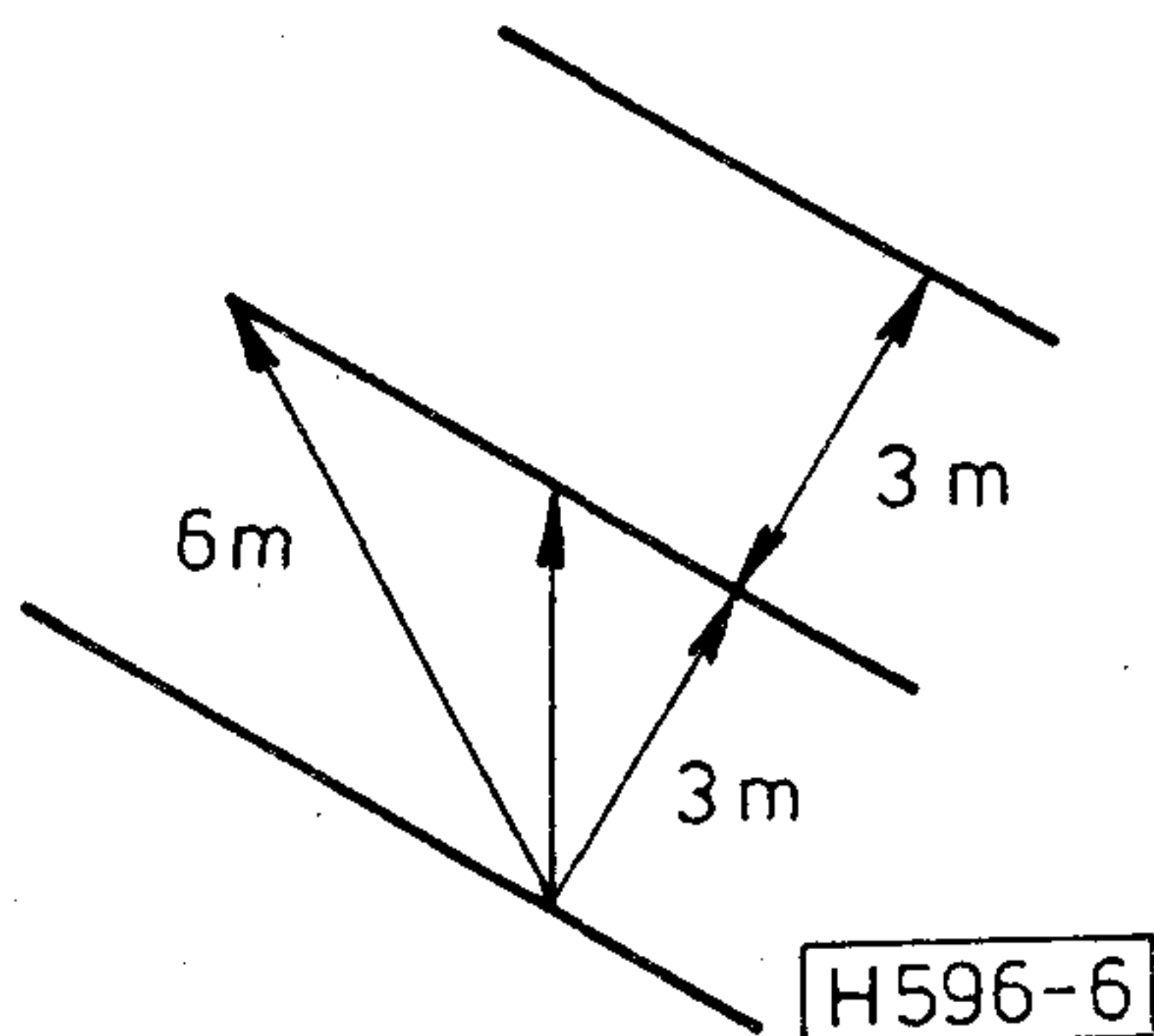
$$\int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} dx dy = \lambda_x \lambda_y \quad (6.d)$$

Megjegyezzük, hogy az ortogonalitás akkor is fennáll, ha  $k_x$  és  $k_y$  helyett  $m \cdot k_x$  és  $n \cdot k_y$  szerepel és  $m, n$  egész számok.

e) Példák

1. példa. Egy hajó által keltett hullámok 3 méterenként követik egymást. Mi a hullámhossz a hullámok haladási irányához képest  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  és  $90^\circ$  alatt?

$$\lambda_{30} = 3.46 \text{ m}, \lambda_{60} = 6 \text{ m}, \lambda_{90} = \infty.$$



6. ábra: Hajó által keltett hullám

H596-6

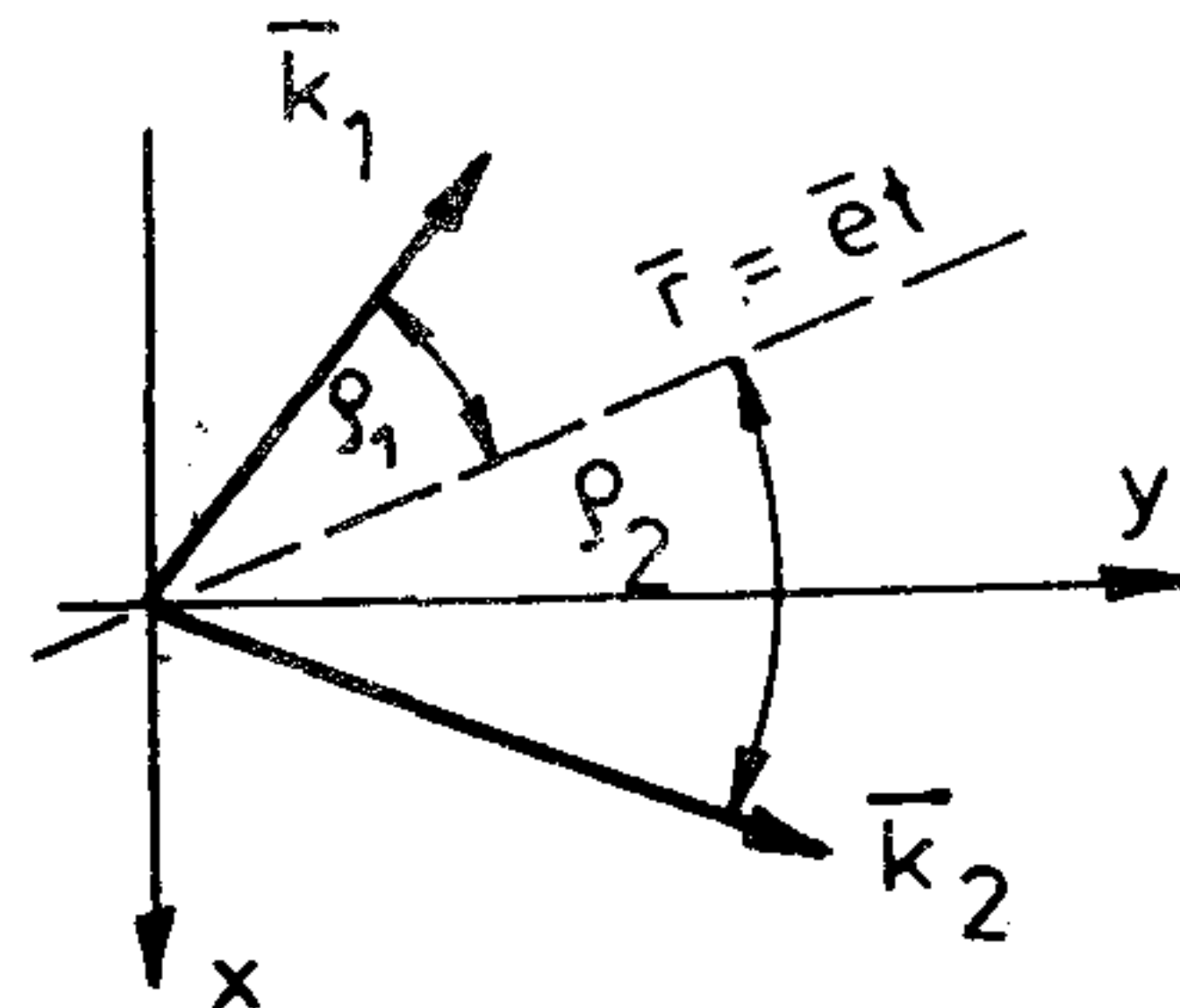
2. példa. Legyen két kétdimenziós szinusz függvény összege az alábbi formula szerinti:

$$f(x, y) = A \cos(\bar{k}_1 \bar{r}) + B \cos(\bar{k}_2 \bar{r} - \varphi).$$

A  $k_1$  és  $k_2$  hullámvektorokat a 7. ábra tünteti fel. Határozzuk meg, hogy mi lesz  $f(x, y)$  metszete az ábrán feltüntetett  $\bar{r} = \bar{e}t$  egyenes mentén? Az egyenes és a  $\bar{k}_1, \bar{k}_2$  vektorokkal zárt szög  $\zeta_1$  és  $\zeta_2$ . A metszet egyenlete:

$$[f(x, y)]_e = A \cos(t \cdot k_1 \cos \zeta_1) + B \cos(t \cdot k_2 \cos \zeta_2 - \varphi). \quad (7)$$

Itt:  $|\bar{k}_1| = k_1$  és  $|\bar{k}_2| = k_2$



H596-7

7. ábra: Két szinusz hullám összege

Tehát két különböző hullámhosszúságú (frekvenciájú) szinusz jel összegét kaptuk.

3. példa. Határozzuk meg, hogy előző példánk esetén milyen irányokban kapunk tiszta szinusz jelet? Mivel előző példánk eredménye két szinusz jel összege volt, tiszta szinusz jelet csak akkor kapunk, ha mindegyik jel hullámhossza azonos vagy pedig ha az egyik összetevő zérus vagy konstans. Tehát a 7. formulából, ha:

$k_1 \cos \zeta_1 = k_2 \cos \zeta_2$  vagy ha  $\zeta_1 = 90^\circ$  vagy:  $\zeta_2 = 90^\circ$ . Ez utóbbi esetekben a metszetek egyenlete:

$$f(t) = A + B \cos(t \cdot k_2 \cos \zeta_2) \text{ illetve: } f(t) = A \cos(t \cdot k_1 \cos \zeta_1) + B \cos \varphi$$

Példáinkból jól látszik, hogy bár  $\bar{k}$  vektor mennyiség, ez nem jelenti azt, hogy ezek a vektorok vektoriálisan összeadhatók. Hamis eredményt kaptunk volna, ha előbb  $\bar{k}_1$  és  $\bar{k}_2$ -t összeadjuk és utána az eredő  $\bar{k}$ -val jellemzett hullám metszeteit keressük.

f) Szimmetria tulajdonságok. A matematikai, fizikai problémák megoldása lényegesen egyszerűbbé válik, ha a jelenségeket leíró függvények valamilyen szimmetriát mutatnak. Vagy ha a leíró függvény nem szimmetrikus, sokszor előnyös, ha a probléma megoldását

a függvény szimmetrikus komponensekre való bontásával kezdjük. A szimmetria tulajdonságok ismerete különösen fontos a Fourier analízis tárgyalásánál. Egydimenziós függvényeknél jól ismert egy tetszőleges  $f(x)$  függvénynek a páros és páratlan szimmetriát mutató részekre való felbontása:

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , ahol:

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \text{a páratlan rész}$$

$$f_2(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{a páros rész} \quad (8)$$

Tehát a felbontás pontról pontra történik, mindig a szimmetrikusan elhelyezkedő,  $\pm x$ -nél levő függvény értékekből.

Kézenfekvő a gondolat, hogy a kétváltozós  $f(x, y)$  függvényeknél is hasonló felbontást alkalmazhatunk.

f.1) Az origóra való szimmetrikus felbontás. A 8. formulához hasonlóan írhatjuk:

$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$ , ahol:

$$f_1(x, y) = \frac{f(x, y) - f(-x, -y)}{2} \quad \text{az origóra páratlan rész} \quad (9)$$

$$f_2(x, y) = \frac{f(x, y) + f(-x, -y)}{2} \quad \text{az origóra páros rész}$$

Kétváltozós függvények esetén azonban további szimmetriák is lehetségesek.

f.2) Az „x” tengelyre szimmetrikus felbontás. Az  $f(x, y)$  függvényt felbonthatjuk az „x” tengelyre páros illetve páratlan szimmetriát mutató részre. Így:

$f(x, y) = f_{1x}(x, y) + f_{2x}(x, y)$ , ahol:

$$f_{1x}(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x, -y)}{2} \quad \text{az „x” tengelyre páratlan rész} \quad (10)$$

$\begin{array}{c c} - & y \\ \hline & \cdot + \\ x & \end{array}$	$\begin{array}{c c} + & \\ \hline & \cdot + \\ & \end{array}$	$\begin{array}{c c} & \\ \hline - & \cdot + \\ & \end{array}$
$f_1(x, y)$	$f_2(x, y)$	$f_{1x}(x, y)$

$\begin{array}{c c} + & \cdot - \\ \hline - & \cdot + \\ & \end{array}$	$\begin{array}{c c} - & \cdot - \\ \hline + & \cdot + \\ & \end{array}$	$\begin{array}{c c} - & \cdot + \\ \hline - & \cdot + \\ & \end{array}$
$f_{11}(x, y)$	$f_{12}(x, y)$	$f_{21}(x, y)$

$$f_{2x}(x, y) = \frac{f(x, y) + f(x, -y)}{2} \quad \text{az „x” tengelyre páros rész}$$

Hasonlóan bonthatjuk fel az  $f(x, y)$  függvényt az „y” tengelyre vonatkoztatott páros és páratlan részre.

f.3) a legáltalánosabb felbontást akkor kapjuk, ha a 10-ben szereplő két függvényt újból felbontjuk az „y” tengelyre vonatkoztatva páros illetve páratlan részre. Így kapjuk:

$$f_{11}(x, y) = \frac{f(x, y) - f(-x, y) - f(x, -y) + f(-x, -y)}{4}$$

$$f_{12}(x, y) = \frac{f(x, y) - f(-x, y) + f(x, -y) - f(-x, -y)}{4}$$

$$f_{21}(x, y) = \frac{f(x, y) + f(-x, y) - f(x, -y) - f(-x, -y)}{4} \quad (11)$$

$$f_{22}(x, y) = \frac{f(x, y) + f(-x, y) + f(x, -y) + f(-x, -y)}{4}$$

A fenti négy függvény összege természetesen megadja az eredeti  $f(x, y)$  függvényt:

$$f(x, y) = f_{11}(x, y) + f_{12}(x, y) + f_{21}(x, y) + f_{22}(x, y) \quad (12)$$

és természetesen fennáll:

$$f_1(x, y) = f_{12}(x, y) + f_{21}(x, y) \quad \text{és} \quad f_2(x, y) = f_{11}(x, y) + f_{22}(x, y)$$

A kétváltozós függvények felbontásának a mechanizmusát összefoglalóan szemlélteti a 8. ábra. A felbontásnál kaptuk a 9,10,11 függvényeket, amelyek mind valamilyen szimmetriát mutatnak. Az ábrákon ezt a szimmetriát úgy érzékeltetjük, hogy az  $x, y$  síkon felveszünk egy pontot (például a pozitív  $x, y$  negyedben) és feltüntetjük a szimmetrikusan elhelyezkedő pontot

8. ábra: Kétdimenziós függvény szimmetriái

$\begin{array}{c c} & \\ \hline + & \cdot + \\ & \end{array}$	$\begin{array}{c c} & \cdot - \\ \hline & \cdot + \\ & \end{array}$	$\begin{array}{c c} & \cdot + \\ \hline & \cdot + \\ & \end{array}$
$f_{2x}(x, y)$	$f_{1y}(x, y)$	$f_{2y}(x, y)$

$\begin{array}{c c} + & \cdot + \\ \hline + & \cdot + \\ & \end{array}$
$f_{22}(x, y)$

H596-8

(pontokat). A pontok helyén a függvény értéke azonos, legfeljebb az előjele különbözhet. Az előjelet az egyes pontokban egymáshoz viszonyítva a pontok mellé írt előjellel tüntetjük fel. Megjegyezzük, hogy az egyes függvényeknél az „1” illetve „2” index a páratlan illetve páros szimmetriára utal.

*Példa.* Határozzuk meg, hogy az 5.c formulában az egyes függvények milyen szimmetriát mutatnak, melyik függvénycsoportba tartoznak. Az 5.c formulái mellett zárójelben tüntettük fel a megoldást. Javasoljuk az olvasónak, hogy grafikusán is próbálja felrajzolni ezeket a függvényeket és az ábrán próbálja szemléltetni a szimmetria tulajdonságokat. Ezek a függvények alapvető fontosságúak a Fourier analízisben és a hullámtanban.

## 2. A három- és többdimenziós szinusz függvény

A 4. formulában leírt  $w = A \cos(\bar{k} \cdot \bar{r} - \varphi)$  szinusz függvény tetszőleges dimenziójú lehet, a dimenzió számot  $\bar{k}$  és  $\bar{r}$  dimenziója határozza meg. Így például három dimenzió esetén:

$$\bar{r} = \bar{e}_1 x + \bar{e}_2 y + \bar{e}_3 z \quad \text{és:} \quad \bar{k} = \bar{e}_1 k_x + \bar{e}_2 k_y + \bar{e}_3 k_z$$

Behelyettesítés után kapjuk:

$$w = f(x, y, z) = A \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \varphi) = A \operatorname{Re}[e^{j(k_x x + k_y y + k_z z - \varphi)}] \quad (13.a)$$

Mindjárt felírtuk a háromdimenziós szinusz függvény komplex alakját is. A komplex alakot röviden így is írjuk:

$$w = f(x, y, z) = A e^{j(\bar{k} \cdot \bar{r} - \varphi)} = A e^{j(k_x x + k_y y + k_z z - \varphi)} \quad (13.b)$$

ahol mindig csak a valós résszel számolunk.

A 13.a formulában egy összeg koszinusza szerepel. Az 1.c pontban ismertetett módon az 5.a trigonometriai összefüggésekkel a háromdimenziós szinusz függvényt is felírhatjuk szinusz-szorzat függvények összegként. A trigonometriai műveleteket elvégezve, az alábbi típusú szorzatokat kapjuk:

$$\left. \begin{array}{l} \cos k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \cos k_z z \\ \cos k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \sin k_z z \\ \dots \\ \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin k_z z \end{array} \right\} 2^3 = 8 \text{ tag} \quad (13.c)$$

Mind a 13.a formula szerinti szinusz függvényt, mind a fenti szorzatokat alapvető háromdimenziós szinusz függvényeknek kell tekintenünk.

Nagyobb dimenzió-szám esetén a viszonyok rohamosan bonyolódnak. „n” dimenzió esetén az egyes szorzatokban a tényezők száma „n”, a tagok száma pedig  $2^n$ .

Három illetve többdimenzió esetén az ábrázolás már nem lehetséges, mert négy- illetve többdimenziós térre volna szükség. Az ilyen függvényeket legfeljebb a metszeteikkel szemléltethetjük.

*Példa.* Határozzuk meg, hogy a 13.a formula milyen függvényt ad az  $\bar{r} = \bar{a} + \bar{e}t$  egyenes mentén? Behelyettesítés után kapjuk:

$$f(t) = A \cos[\bar{k}(\bar{a} + \bar{e}t) - \varphi] = A \cos(k_e t - \varphi_e) \\ \text{ahol: } k_e = \bar{k} \cdot \bar{e} \text{ és: } \varphi_e = \bar{k} \cdot \bar{a} - \varphi$$

*Példa.* Határozzuk meg, hogy milyen függvényt ad a 13.a formula az  $\bar{r} = \bar{a} + \bar{e}s + \bar{g}t$  sík mentén? Behelyettesítés után kapjuk:

$$f(s, t) = A \cos[\bar{k}(\bar{a} + \bar{e}s + \bar{g}t) - \varphi] = A \cos(k_e s + k_g t - \varphi_e) \\ \text{ahol: } k_e = \bar{k} \cdot \bar{e}, k_g = \bar{k} \cdot \bar{g} \text{ és: } \varphi_e = \bar{k} \cdot \bar{a} - \varphi$$

Tehát egy kétdimenziós szinusz függvényt kaptunk.

Természetesen többdimenzió esetén is minden hullámszámhoz egy hullámhossz tartozik. Itt is például:  $k_x = 2\pi/\lambda_x, k_y = 2\pi/\lambda_y, k_z = 2\pi/\lambda_z$ , stb.

Háromnál nagyobb dimenzió szám igen ritkán fordul elő.  $n > 3$  esetén is a 13.a formulából indulunk ki.  $\bar{r}$  és  $\bar{k}$  helyébe a megfelelő dimenziójú vektort helyettesítve, a tárgyalásmód teljesen analóg a háromdimenziónál ismertetettel.

A többdimenziós szinusz függvények ismeretében megkezdhetjük a többdimenziós periodikus függvények Fourier sorának a tárgyalását.

## 3. Egyszeresen periodikus kétdimenziós függvény Fourier sora

Legyen a kétdimenziós  $z = f(x, y)$  függvény a  $-\infty < x < +\infty$  és a  $0 < y < \lambda_y$  tartományban tetszőleges alakú és ez az alakzat ismétlődjön az „y” tengely irányában  $\lambda_y$  távolságonként. Az ilyen függvényt egyszeresen periodikusnak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy az  $f(x, y)$  függvénynek bármely  $x = x_i$  konstanshoz tartozó metszete egy periodikus egydimenziós függvény,  $\lambda_y$  periódus hosszal, amelynek felírhatjuk a Fourier sorát. Az egydimenziós Fourier sor ismert alakja:

$$f(y) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 y + a_2 \cos 2\omega_0 y + \dots + b_1 \sin \omega_0 y + \dots$$

Esetünkben  $\omega_0$  helyébe  $k_y = 2\pi/\lambda_y$ -ont kell írunk. Ezenkívül  $a_i, b_i$  adott  $x_i$  esetén konstans, de minden  $x_i$ -hez más és más értékű. Tehát  $a_i, b_i$  helyébe  $a_i(x), b_i(x)$ -et kell írunk. Tehát a Fourier sor:

$$f(x, y) = a_0(x) + a_1(x) \cos k_y y + a_2(x) \cos 2k_y y + a_3(x) \cos 3k_y y + \dots + b_1(x) \sin k_y y + b_2(x) \sin 2k_y y + \dots \quad (14.a)$$

Ezzel megkaptuk az egyszeresen periodikus kétdimenziós függvény Fourier sorát, amely természetesen előállítja magát az eredeti  $f(x, y)$  függvényt is. A Fourier

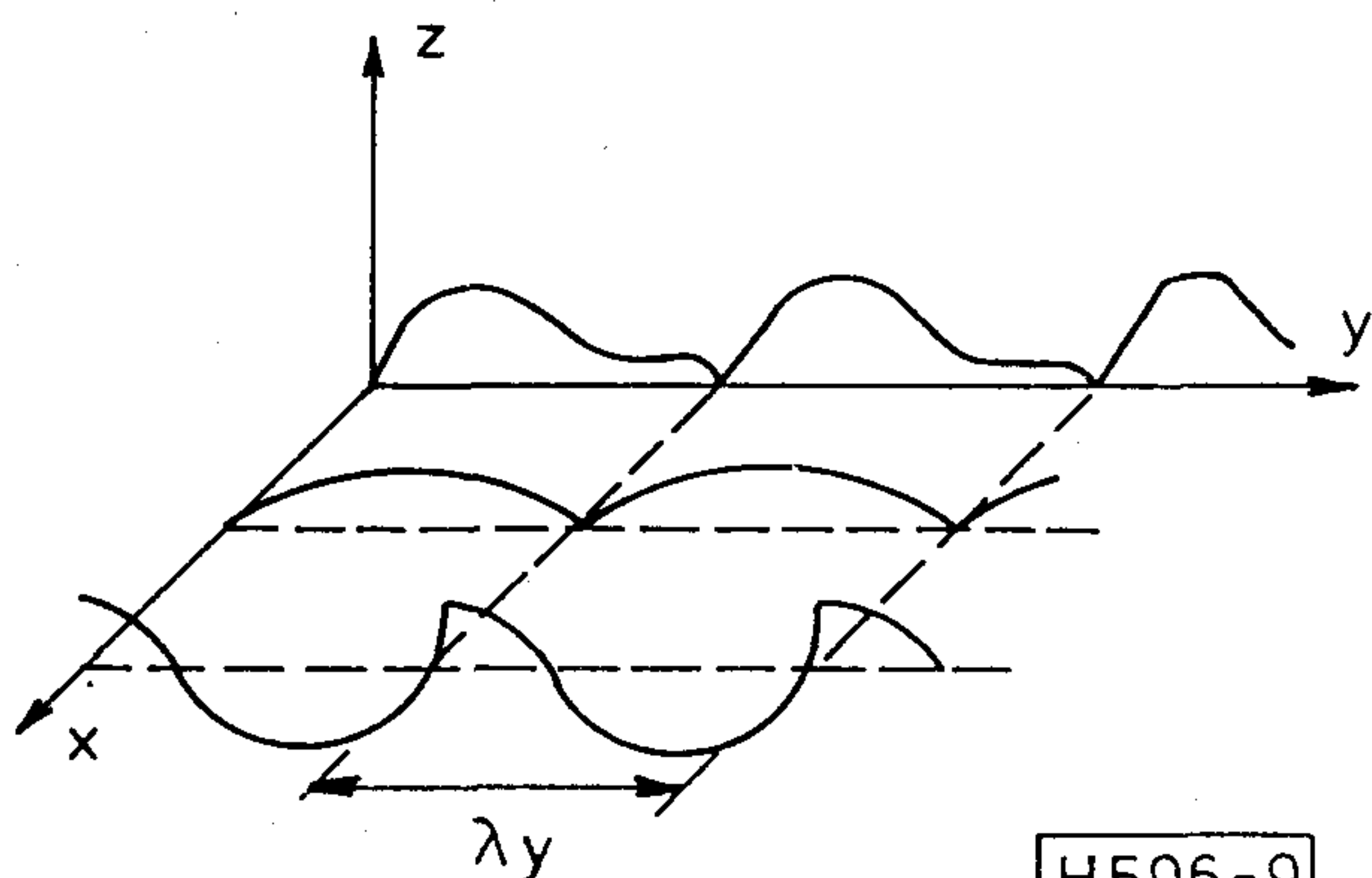
együtthatókat az egydimenziós Fourier sor formuláiból kapjuk:

$$a_0(x) = \frac{1}{\lambda_y} \int_0^{\lambda_y} f(x, y) dy$$

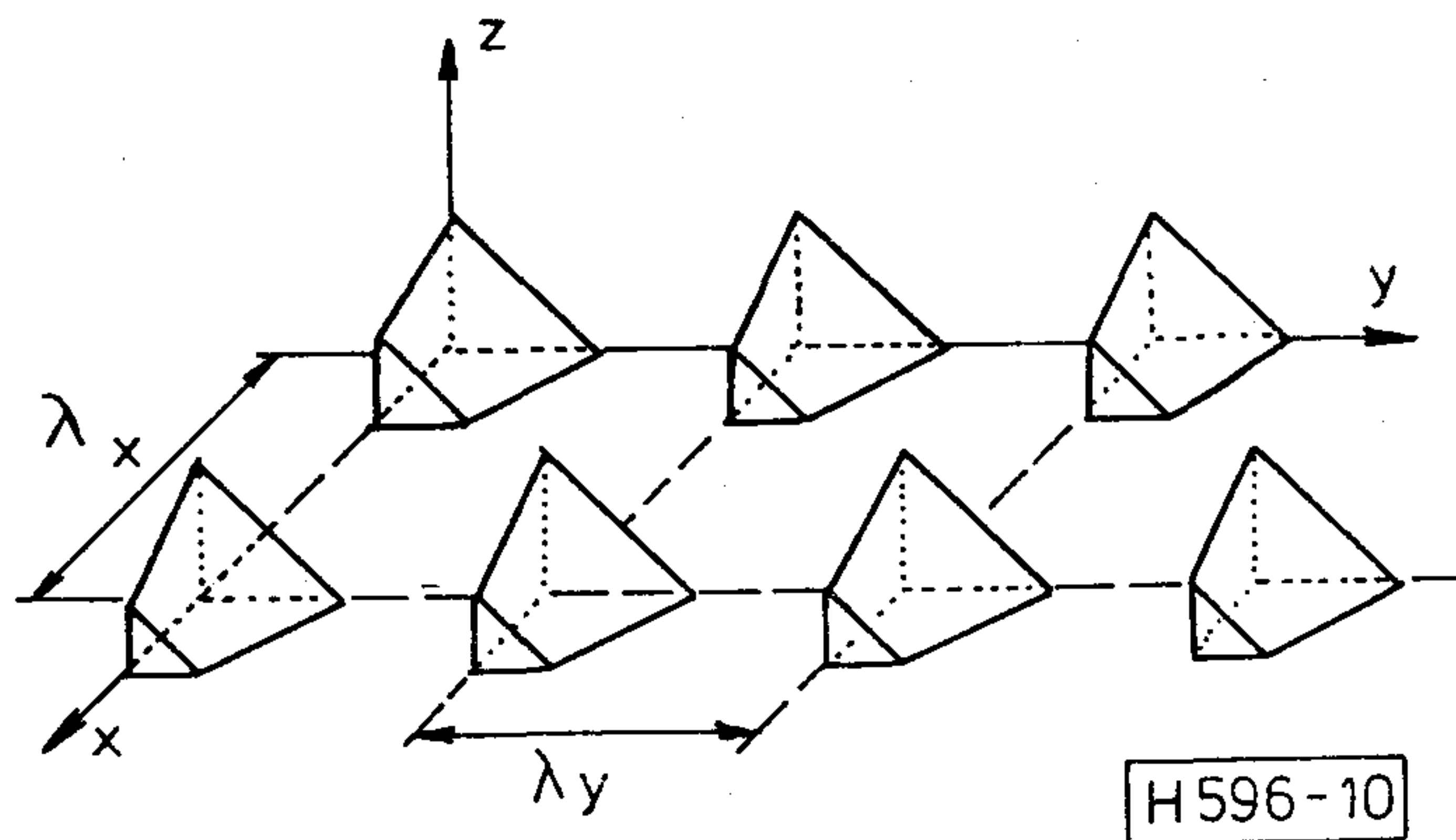
$$a_n(x) = \frac{2}{\lambda_y} \int_0^{\lambda_y} f(x, y) \cos nk_y dy \quad (14.b)$$

$$b_n(x) = \frac{2}{\lambda_y} \int_0^{\lambda_y} f(x, y) \sin nk_y dy$$

Ha az  $f(x, y)$  függvény az „ $x$ ” tengely irányában periodikus, akkor a fenti formulákban „ $x$ ” és „ $y$ ” helyet cserél.



9. ábra: Egyszeresen periodikus kétdimenziós függvény



10. ábra: Kétszeresen periodikus kétdimenziós függvény

#### 4. Kétszeresen periodikus kétdimenziós függvény Fourier sora

Legyen az  $f(x, y)$  függvény  $0 < x < \lambda_x$  és a  $0 < y < \lambda_y$  tartományban tetszőleges alakú és ez az alakzat ismétlődően periodikusan az „ $x$ ” és az „ $y$ ” irányban. Egy példát a 10. ábra tüntet fel. Határozzuk meg egy ilyen periodikus függvény Fourier sorát. Ebben az esetben is minden további nélkül használhatjuk a 14.a, b formulákat. De további lépést jelent ha felismerjük, hogy az  $a_i(x)$ ,  $b_i(x)$  Fourier együtthatók periodikusan ismétlődnek az „ $x$ ” tengely mentén, tehát ezeknek is felírhatjuk a Fourier sorát. Mivel a periodikus hossz az „ $x$ ” ten-

gely mentén  $\lambda_x$  és mivel  $\lambda_x = 2\pi/k_x$ , a két Fourier sor lesz:

$$a_i(x) = a_{0i} + a_{1i} \cos k_x x + a_{2i} \cos 2k_x x + a_{3i} \cos 3k_x x + \dots + b_{1i} \sin k_x x + b_{2i} \sin 2k_x x + b_{3i} \sin 3k_x x + \dots$$

ahol:  $i = 0, 1, 2, \dots$

$$b_i(x) = c_{0i} + c_{1i} \cos k_x x + c_{2i} \cos 2k_x x + c_{3i} \cos 3k_x x + \dots + d_{1i} \sin k_x x + d_{2i} \sin 2k_x x + d_{3i} \sin 3k_x x + \dots$$

ahol:  $i = 1, 2, 3, \dots$  (15.a)

Helyettesítsük be a  $a_i(x)$ ,  $b_i(x)$  fenti Fourier sorát a 14.a formulába:

$$f(x, y) = a_{00} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m0} \cos mk_x x + b_{m0} \sin mk_x x) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{0n} \cos nk_y y + c_{0n} \sin nk_y y) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{mn} \cos mk_x x \cdot \cos nk_y y + b_{mn} \sin mk_x x \cdot \cos nk_y y + c_{mn} \cos mk_x x \cdot \sin nk_y y + d_{mn} \sin mk_x x \cdot \sin nk_y y) \quad (15.b)$$

A fenti formulában az első két összegezés az elfajuló csak  $k_x$  illetve  $k_y$ -ont tartalmazó tagokból áll. Ezeket is bevonhatjuk a kétszeresen összegező részbe a határok megváltoztatásával.

Így kapjuk:

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{mn} \cos mk_x x \cdot \cos nk_y y + b_{mn} \sin mk_x x \cdot \cos nk_y y + c_{mn} \cos mk_x x \cdot \sin nk_y y + d_{mn} \sin mk_x x \cdot \sin nk_y y) \quad (15.c)$$

$f(x, y)$ , egy újabb alakját kapjuk, ha a fenti formulában a trigonometrikus szorzatokat trigonometrikus összegekre alakítjuk át. Például:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \text{ stb. Helyettesítéssel az összevonások után kapjuk:}$$

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{a_{mn} - d_{mn}}{2} \cos(mk_x x + nk_y y) + \frac{b_{mn} - c_{mn}}{2} \sin(mk_x x - nk_y y) + \frac{b_{mn} + c_{mn}}{2} \sin(mk_x x + nk_y y) + \frac{a_{mn} + d_{mn}}{2} \cos(mk_x x - nk_y y) \right] \quad (15.d)$$

A fenti formulát egyszerűbben írhatjuk fel, ha bevezetjük „ $n$ ” negatív értékeit és a második összegezést a  $-\infty < n < +\infty$  tartományban végezzük. Így kapjuk:

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [A_{mn} \cos(mk_x x + nk_y y) + B_{mn} \sin(mk_x x + nk_y y)] \quad (15.e)$$

A szögletes zárójelben lévő két tag összevonható, tehát:

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_{mn} \cos(mk_x x + nk_y y - \varphi) \quad (15.f)$$

ahol:

$$D_{mn} = \sqrt{A_{mn}^2 + B_{mn}^2} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{B}{A}$$

Az összefüggés az  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $D_{mn}$  és az  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$ ,  $c_{mn}$  és  $d_{mn}$  együtthatók között a 15.d és az 15.e,f formulák összehasonlításából azonnal adódik.

A 15.c és a 15.d,e,f formulák a kétszer periodikus kétdimenziós függvények Fourier sorának két különböző alakját adják meg. A formulákból azt a fontos megállapítást tehetjük, hogy egy kétszer periodikus kétdimenziós  $f(x,y)$  függvény kétdimenziós szinuszos függvényekből összetettnek tekinthető. A 15.c formula az 5.c formula szerinti, a 15.d,e,f formula pedig a 2. formula szerinti alapvető kétdimenziós szinuszos függvényekből állítja elő  $f(x,y)$ -ont.

#### 4. 1. A Fourier együtthatók meghatározása

Az  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$ ,  $c_{mn}$ ,  $d_{mn}$  együtthatók egyszerűen meghatározhatók a kétdimenziós szinuszos függvények ortogonális tulajdonságai alapján. Az egydimenziós Fourier sor együtthatóinak a meghatározásánál használt módszerhez hasonlóan, itt is a 15.b formula mindkét oldalát rendre megszorozzuk 1,  $\cos mk_x x$ ,  $\sin mk_x x$ , ...  $\sin mk_x x \cdot \sin nk_y y$ -al és mindkét oldalt integráljuk az 5. ábrán megadott ortogonális tartományok valamelyikében. A jobb oldalon az integrálás után csak egyetlen tag ad zérustól eltérő eredményt, amit a 6.b,c,d formulák megfelelőjéből számíthatunk. Így az integrálási tartománynak például az 5.b ábra szerinti tartományt véve kapjuk:

a)  $a_{00}$  meghatározása. Integráljuk a 15.b formula mindkét oldalát az ortogonális tartományban. Kapjuk:

$$\int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} f(x,y) dx dy = a_{00} \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} dx dy = a_{00} \lambda_x \lambda_y$$

Eredményünket a 6.d formula alapján kaptuk. A többi tag integrálása zérust ad. Mindkét oldalt  $\lambda_x \lambda_y$ -al osztva, kapjuk:

$$a_{00} = \frac{1}{\lambda_x \lambda_y} \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} f(x,y) dx dy \quad (16.a)$$

vagyis  $a_{00}$  megadja a felület átlagos magasságát.

b)  $A \frac{\cos}{\sin} mk_x x$  és  $a \frac{\cos}{\sin} nk_y y$  tagok együtthatóinak, vagyis

is  $a_{m0}$ ,  $b_{m0}$ ,  $a_{0n}$  és  $c_{0n}$  értékeit hasonlóan határozhatjuk meg. A 15.b formula mindkét oldalát a megfelelő  $\cos$  illetve  $\sin$  függvénnyel megszorozzuk és mindkét oldalt az ortogonális tartományban integráljuk. Így a 6.c formula felhasználásával kapjuk, például  $a_{m0}$  esetén:

$$a_{m0} = \frac{2}{\lambda_x \lambda_y} \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} f(x,y) \cos mk_x x dx dy \quad (16.b)$$

és hasonlóan számítjuk  $b_{m0}$ ,  $a_{0n}$  és  $c_{0n}$  értékeit. A  $b_{0n}$  és  $c_{m0}$ ,  $d_{0n}$ ,  $d_{n0}$  együtthatók értéke zérus.

c)  $A \frac{\cos}{\sin} mk_x x \cdot \frac{\cos}{\sin} nk_y y$  tagok együtthatóit, vagyis

$a_{mn}$ ,  $b_{mn}$ ,  $c_{mn}$  és  $d_{mn}$  értékeit, ha  $m \neq 0$  és  $n \neq 0$ , a 15.b formula mindkét oldalát a megfelelő szinuszos szorzattal szorozva, az ortogonális tartományban integrálva, a 6.b formula felhasználásával kapjuk. Tehát:

$$a_{mn} = \frac{4}{\lambda_x \lambda_y} \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} f(x,y) \cdot \cos mk_x x \cdot \cos nk_y y dx dy \quad (16.c)$$

$$b_{mn} = \frac{4}{\lambda_x \lambda_y} \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} f(x,y) \cdot \sin mk_x x \cdot \cos nk_y y dx dy \quad (16.d)$$

$$c_{mn} = \frac{4}{\lambda_x \lambda_y} \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} f(x,y) \cdot \cos mk_x x \cdot \sin nk_y y dx dy \quad (16.e)$$

$$d_{mn} = \frac{4}{\lambda_x \lambda_y} \int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} f(x,y) \cdot \sin mk_x x \cdot \sin nk_y y dx dy \quad (16.f)$$

#### 4. 2. A kétdimenziós Fourier sor komplex alakja

Előző eredményeinket sokkal egyszerűbben és tömörebben – bár kevésbé szemléletesen – megkaphatjuk, ha a komplex írásmódot használjuk. A következőkben ezt ismertetjük röviden.

Írjuk fel először az egyszer periodikus kétdimenziós  $f(x,y)$  függvény Fourier sorát. Ha a periodicitás „y” tengely irányú, akkor a 14.a formula komplex alakja így írható:

$$f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(x) e^{jnky} \quad (17.a)$$

A fenti formula az egydimenziós Fourier sor komplex alakja. Kétszeresen periodikus kétdimenziós függvény esetén  $C_n(x)$  is periodikus az „x” tengely mentén. A Fourier sora:

$$C_n(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{mn} e^{jmk_x x} \quad (17.b)$$

Helyettesítsük be  $C_n(x)$  fenti alakját 17.a-ba. Kapjuk:

$$f(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} e^{j(mk_x x + nk_y y)} \quad (17.c)$$

Ezzel megkaptuk a 15.b,c,d,e,f formulákban szereplő Fourier sorok komplex alakját.

Számítsuk ki  $C_{mn}$  együtthatókat.  $e^{-j(mk_x x + nk_y y)}$ -al szorozzuk meg a fenti formula mindkét oldalát és integráljuk mindkét oldalt az ortogonalitási tartományban. (A szimmetria kedvéért az ortogonalitási tartományt az 5.a ábra szerint vettük.) A jobb oldalon csak a  $C_{mn}$ -et tartalmazó tag ad zérustól eltérő eredményt,  $C_{mn} \cdot \lambda_x \lambda_y$ -ont. (Itt  $m, n$  adott érték. A futó indexeket is  $m, n$ -el jelöltük, de ez nem okozhat félreértést.) Azt, hogy a többi tag zérust ad, könnyen igazolhatjuk, ha az egyes tagokban az exponenciális alakról áttérünk a trigonometrikus alakra és a valós és a képzetes részeket külön-külön integráljuk. Mindkét rész zérust ad. Tehát:

$$C_{mn} = \frac{1}{\lambda_x \lambda_y} \int_{-\lambda_x/2}^{+\lambda_x/2} \int_{-\lambda_y/2}^{+\lambda_y/2} f(x,y) e^{-j(mk_x x + nk_y y)} dx dy \quad (17.d)$$

ahol  $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

A fenti formulából szükségszerűen következik, hogy

$$C_{-m, -n} = C_{mn}^* \quad (17.e)$$

Ugyanis a 17.d formulában  $m$  és  $n$  előjelét megváltoztatva, csak a képzetes előjele változik meg, tehát a konjugált értéket kapjuk.

$C_{mn}$  általában komplex szám, legyen a következő alakú:

$$C_{mn} = \frac{A_{mn} - j B_{mn}}{2} \text{ és így: } C_{-m, -n} = \frac{A_{mn} + j B_{mn}}{2} \quad (17.f)$$

Hasonlóan bizonyítjuk, hogy  $C_{m, -n}$  és  $C_{-m, n}$  egymás konjugáltjai.

Bizonyítsuk be, hogy a kétdimenziós Fourier sor a 17.c formula szerinti komplex alakja valóban azonos az előzőleg levezetett formulákkal. A 17.c formula jobb oldalán vonjuk össze a  $C_{m, -n}$  és  $C_{-m, n}$  tagokat, „ $n$ ”-ben tartsuk meg a  $-\infty < n < +\infty$ -ig tartó összegezést. Ekkor az összevonásnál ugyanazt az eredményt kapjuk, ha a  $C_{mn}$  és  $C_{-m, -n}$  tagokat vonjuk össze. Az összevonás elvégzését az olvasóra bízunk (az exponenciális tagot először trigonometrikus alakra kell hozni, a szorzást elvégezni majd a tagokat összevonni). Felhasználva az  $e^{jz} + e^{-jz} = 2 \cos z$  és:  $e^{jz} - e^{-jz} = j 2 \sin z$  összefüggéseket kapjuk:

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [A_{mn} \cos(mk_x x + nk_y y) + B_{mn} \sin(mk_x x + nk_y y)] \quad (17.g)$$

Valóban megkaptuk a 15.e formulát, amely ekvivalens a többi levezetett formulával.

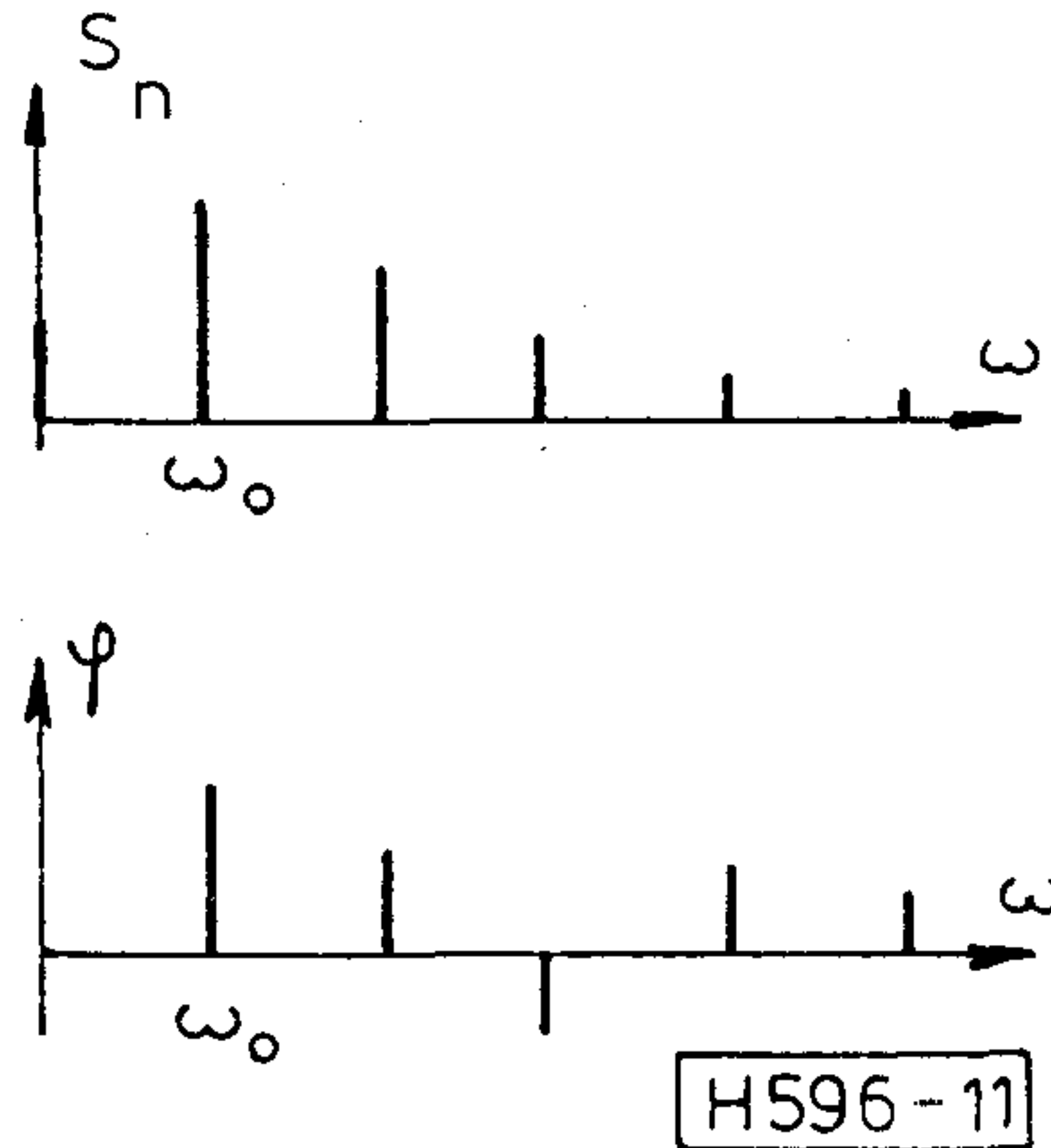
#### 4.3. A kétdimenziós vonalas spektrum

Egydimenziós periodikus függvények esetén a spektrumot két féle módon ábrázolhatjuk: vagy megadjuk a „cos” és a „sin” összetevők amplitúdóját, vagy pedig

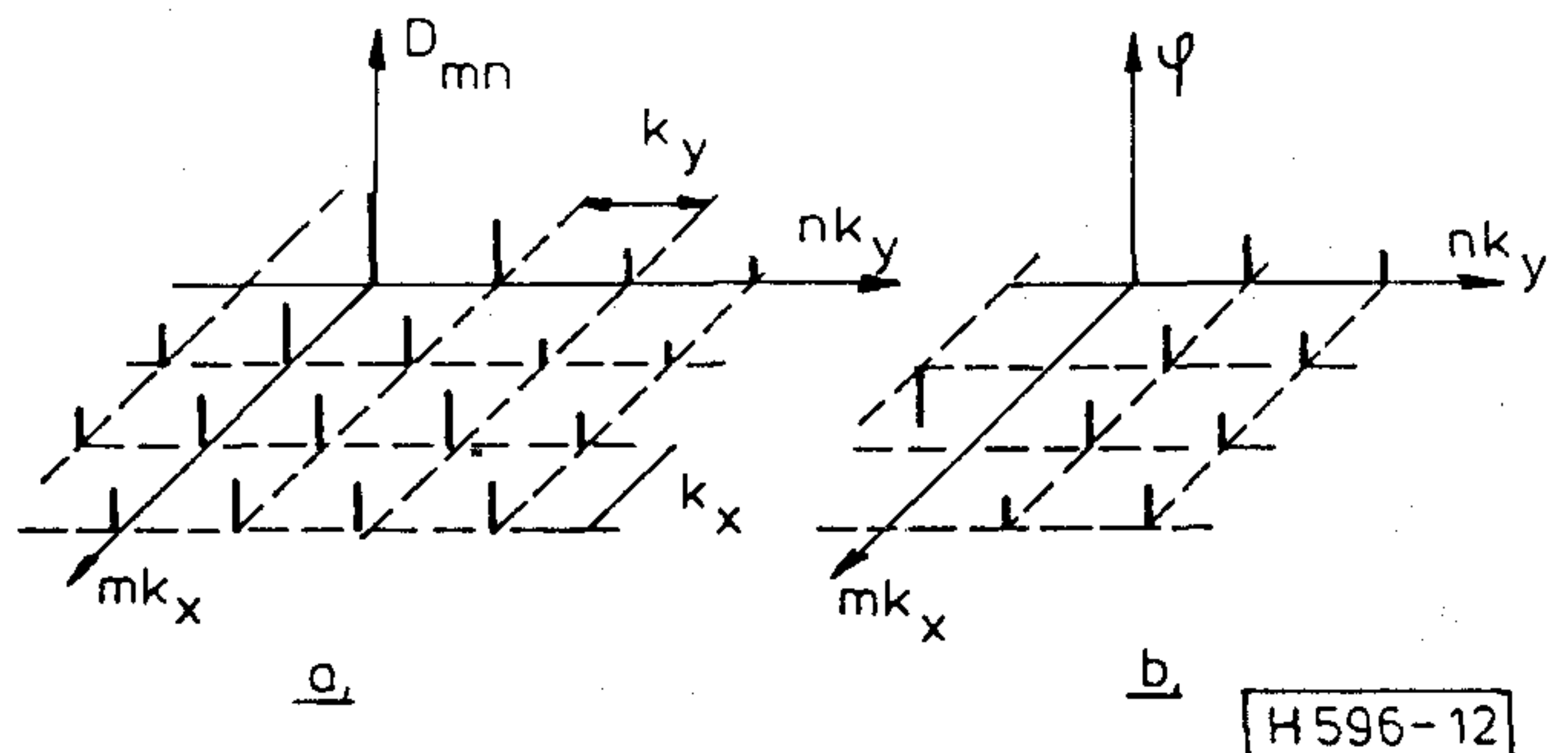
megadjuk az egyes komponensek amplitúdóját és fázisát. Emlékeztetőül a 11. ábrában tüntetünk fel egy ilyen spektrumot, ahol az egyes komponensek amplitúdóját és fázisát adjuk meg. A függőleges vonalak magassága arányos az amplitúdóval illetve a fázisszöggel. Megemlítjük még, a vízszintes tengelyt skálázhatjuk  $\omega$  vagy „ $f$ ”-ben.

A spektrumban szereplő diszkrét frekvenciák csakis  $\omega_0$  illetve  $f_0$ -nak egész számú többszörösei lehetnek.

Ezenkívül a spektrumban számolhatunk csak pozitív vagy pozitív és negatív frekvenciákkal. (11. ábra)



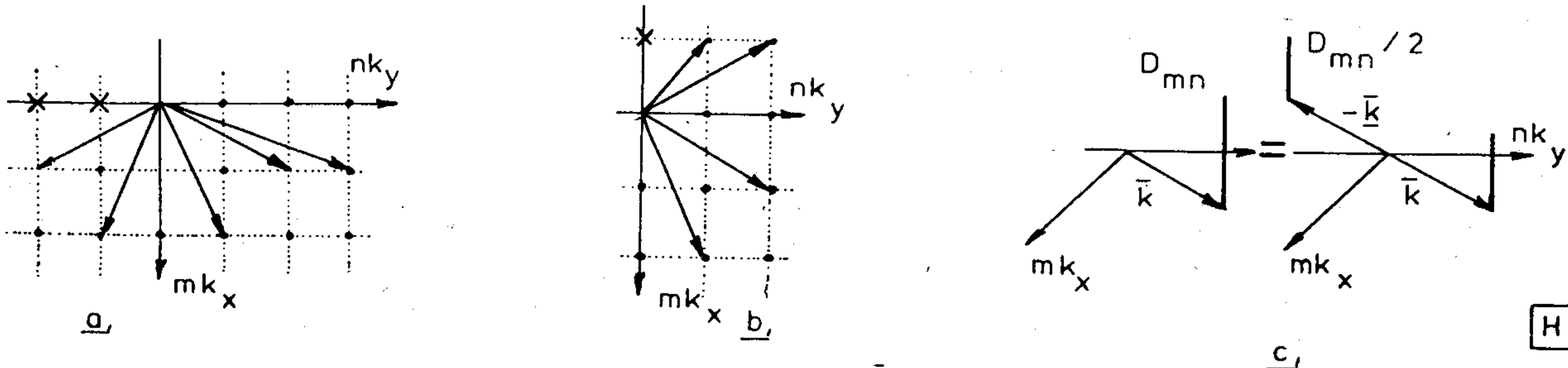
11. ábra: Egydimenziós vonalas spektrum



12. ábra: A kétdimenziós vonalas spektrum

Kétdimenziós esetben  $\omega_0$ -nak a  $\bar{k}$  hullámvektor felel meg. Mivel  $\bar{k}$  kétdimenziós, az ábrázolásához egy síkra van szükség.  $\bar{k}$  két komponense  $k_x$  és  $k_y$ . A kétdimenziós Fourier sor diszkrét frekvenciáinak a diszkrét hullámvektorok felelnek meg, a  $k$  síkon  $mk_x$  és  $nk_y$  komponensekkel. Tehát minden komponens a  $\bar{k}$  síkon egy-egy pontnak felel meg. Ezek a pontok a  $\bar{k}$  síkon egy szabályos hálót képeznek. A 12.a,b ábrák tüntetik fel a  $\bar{k}$  síkot. A spektrumot ezek után úgy ábrázoljuk, hogy a háló minden pontjában egy függőleges egyenest húzunk, amelynek a hossza azonos az illető hullámvektorhoz tartozó kétdimenziós szinusz hullám amplitúdójával („a” ábra). A „b” ábrában pedig az egyes hálópontokban az illető hullám fázisszögével arányos függőleges egyenest húzunk. Ez a spektrum ábrázolás megfelel az A.15.f formula szerinti Fourier sornak. A spektrum ábrázolásának egy másik lehetséges módja,





13. ábra: a  $\bar{k}$  sík

ha a két  $k$  sík hálópontjaiban a 15.e formulában szereplő  $A_{mn}$  és  $B_{mn}$  értékeivel arányos hosszúságú egyeneseket húzunk függőleges irányban.

A figyelmesebb olvasónak valószínűleg feltűnt, hogy bár az „x” és az „y” irányú periodicitás teljesen egyenrangú, a hozzájuk kapcsolódó „m” és „n” indexek nem egyformán szerepelnek a formuláinkban. Ennek csupán formai okai vannak. Ugyanis a kiindulásnál, a 14.a formulában először egy „y” irányú egyszeresen periodikus függvényből indultunk ki. Ha fordítva, az „x” tengely irányú periodicitásból indultunk volna ki, akkor a formuláinkban  $m$  és  $n$  szerepet cserélne. A végeredményen természetesen semmit sem változtat.

A  $\bar{k}$  sík világos képet ad a Fourier felbontás lényegéről. Vegyük például a 13.a ábra szerinti  $\bar{k}$  síkot. Az  $mk_x$ ,  $nk_y$ -nal jellemzett pontok mind az egyes Fourier komponensek hullámvektorát adják meg, tehát jelzik, hogy milyen irányú kétdimenziós szinuszos hullámokból tevődik össze az  $f(x, y)$  függvény. Az egyes vektorok hossza arányos az illető hullám frekvenciájával.

Az ábrából az is látszik, hogy az összes lehetséges  $\bar{k}$  vektor egy félsíkon helyezkedik el (ez megfelel annak, hogy egydimenziós esetben csak pozitív frekvenciákkal számolunk, amire a frekvencia tengelyen elegendő a pozitív fél-tengely). Ezért van az, hogy levezetett Fourier sorainkban a kettős,  $m$  és  $n$  szerinti összegzésnél az egyik összegezés  $0$  és  $\infty$ , a másik pedig  $-\infty$  és  $+\infty$  között történik. Számítási módszerünkben az „y” tengely

alatti félsíkra volt szükség. Mint említettük, levezetésünkben az „x” tengely irányú periodicitásból is indulhattunk volna, akkor a  $\bar{k}$  vektorok a „b” ábra szerinti félsíkon helyezkednének el. A komplex számításmódnál szimmetria okokból a teljes  $\bar{k}$  síkot igénybe vesszük. Ez analógja annak, amikor egydimenziós esetben pozitív és negatív frekvenciákkal számolunk. A „c” ábra tünteti fel, hogy kétdimenziós esetben ez megfelel annak, hogy egy hullámvektort két ellenkező irányú hullámvektor eredőjének tekintünk, amelynek fele akkora az amplitúdója. Mindenesetre akkor az ellenkező irányú hullámvektorhoz tartozó amplitúdót kell ellenkező előjellel venni, vagy pedig a fázisát  $180^\circ$ -al eltolni.

Itt szeretnénk egy zavaró körülményre rámutatni. Ha csak a fél  $k$  síkkal számolunk, akkor is a síkot határoló egyenes mentén ellenkező irányú hullámvektorok lépnek fel. Például a „a” ábrában az „y” tengely mentén,  $m=0$  esetén. Az  $x$ -el jelölt pontokban az amplitúdót zérusnak kell vennünk, ha el akarjuk kerülni, hogy mindenütt csak egy irányú hullámvektorokkal számolunk, kivéve az „y” tengelyt. Ez a tény a Fourier együtthatók számításánál is nehézséget okoz (ezért nem bonyolítottunk bele a 15.e,f formuláknál az  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $D_{mn}$  együtthatók kiszámításába). Ilyen feladatoknál mindig célszerű felrajzolni a  $\bar{k}$  síkot és azon is követni a számítások menetét.

## СОДЕРЖАНИЕ

## INHALT

## CONTENTS

Биро, В.:

Несколько вопросов по проектированию микроволновых транзисторных усилителей с малым шумом  
HÍRADÁSTECHNIKA (HIRADÁSHTECHNIKA, Будапешт) 1990. № 9-10.

В статье рассматривается:

- определение шумфактора многокаскадного усилителя на транзисторах не предполагая согласования между отдельными каскадами,
- изменение шумовых параметров и  $S$ -матрицы транзистора при параллельной обратной связи.

Результаты расчетов произведенных на Э. В. М. типа IBM PC/AT с помощью программы основанной на полученных теоретических выводах показывают, что в случае двухкаскадного усилителя в котором используется покаскадная резонансная обратная связь некоторые параметры усилителя значительно улучшаются без заметного ухудшения шумфактора усилителя.

Др. Балог, А.:

Надежность и затраты потребителя

HÍRADÁSTECHNIKA (HIRADÁSHTECHNIKA, Будапешт) 1990. № 9-10.

Статья анализирует влияние увеличения надежности на затраты в области полупроводниковых приборов. Осветит то, что затраты на примененные испытания по увеличению надежности не должны превзойти полученные в результате этих испытаний уменьшения затрат по ремонту. Статья оценивает затраты испытаний в зависимости от размера партий. Методы оценки затрат автор показывает с помощью иностранных примеров с целью того, что в будущем и отечественные потребители деталей могли вынести решения ориентированные затратами в целях обеспечения надежности своих изделий.

Cebe, L.:

Двух- и многомерный ряд фурье и интеграл фурье

HÍRADÁSTECHNIKA (ХИРАДАШПЕХНИКА. Будапешт) 1990. № 9-10.

В первой части нашей статьи мы занимаемся двух- и многомерным вариантом синусоидальных функций. На их основе рассматриваем ряд фурье двух- и многомерных периодических функций, а потом интеграл фурье двух- и многомерных непериодических функций. Это малоизвестная часть математики имеет основную важность в теории волн и во многих других областях физики.

Во второй части нашей статьи останавливаемся на многомерном импульсе Дирака и на многомерной выборочной функции. Они имеют особое значение во все больше распространяющейся цифровой обработке изображений.

\*\*\*

Biro, V.:

**Einige Probleme der Planung von transistorisierten Mikrowellen-Verstärker mit niedrigem Geräusch**

HÍRADÁSTECHNIKA (Budapest) 1990. Nr. 9-10.

Die Publikation befasst sich:

- mit der Definition des Rauschfaktors des mehrstufigen Transistorverstärkers, Ausserachtlassung der Anpassung zwischen den Stufen,
- mit dem Rauschparameter- und S-Parameteränderung des Transistors bei paralleler Rückkopplung.

Die mit Hilfe eines für die Rechenmaschine IBM PC/AT hergestellten Programmes wurde festgestellt, dass die Transistoren-Resonanzrückkopplung die einzelnen Parameter des Zweistufenverstärkers wesentlich verbessert, ohne der wesentlichen Verschlechterung des Rauschfaktors.

Dr. Balogh, A.:

**Die Zuverlässigkeit und die Kosten des Verwenders**

HÍRADÁSTECHNIKA (Budapest) 1990. Nr. 9-10.

Diese Publikation untersucht im Falle von Halbleitern die Kostenauswirkung der Erhöhung der Zuverlässigkeit. Es wird darauf hingewiesen, daß die Kosten der Prüfungen für die Erhöhung der Zuverlässigkeit das Ausmass der daraus entstandenen Kostensenkung der Reparatur nicht überschreiten sollen. Die Studie wertet die Prüfungskosten in Funktion der Losgrößen aus. Die Auswertungsmethoden der Kosten werden vom Autor, mittels ausländischer Beispiele dargestellt, im Interesse dessen, daß auch die ungarischen Komponentenverwender, zu Gunsten der Zuverlässigkeitssicherung kostenorientierte Entscheidungen bringen.

Cebe, L.:

**Fourier-Reihe und Fourier-Integral von zwei oder mehr Dimensionen**

HÍRADÁSTECHNIKA (Budapest) 1990. Nr. 9-10.

Im ersten Teil unseres Artikels beschäftigen wir uns mit den Varianten von zwei oder mehr Dimensionen der Sinusfunktionen. Auf Grund dessen wird die Fourier-Reihe der periodischen Funktionen von zwei oder mehr Dimensionen und danach das Fourier-Integral

der aperiodischen Funktionen von zwei oder mehr Dimensionen behandelt. Dieser weniger bekannte Teil der Mathematik ist vom wesentlicher Wichtigkeit in der Wellenlehre und in vielen anderen Gebieten der Physik.

Im zweiten Teil unseres Artikels gehen wir kurz auf den Dirac-Impuls von mehreren Dimensionen ein, sowie auf die probeentnehmende Funktion von mehreren Dimensionen. Diese haben besondere Bedeutung in der immer mehr an Boden gewinnenden digitalen Bildverarbeitung.

\*\*\*

Biró, V.:

**Some Questions about the Planning of the low-noise Microwave Transistor Amplifiers**

HÍRADÁSTECHNIKA (Budapest, 1990. No 9-10.

The noise figure of multistage transistor amplifier without conjugate match between the stages and the influence of parallel feedback on noise parameters and S matrix of the transistor are discussed. For two-staged amplifier the considerable improvement of some parameters without degradation of the noise figure can be obtained by applying resonant feedback in each stage of amplifier, according to the results calculated using IBM PC/AT computer with the program based on the above-mentioned theoretical results.

Dr. Balogh, A.:

**Reliability and the Cost of the User**

HÍRADÁSTECHNIKA (Budapest) 1990. No. 9-10.

This publication examines the cost effects of the reliability increase in the case of semiconductor devices. It casts light on that, the cost of the applied tests increasing the reliability must not exceed the range of the decrease in the repair cost appearing as a result of these tests. Test costs are evaluated by the study, as a function of item volume. Evaluation methods of the costs are illustrated by means of foreign examples by the author, for the sake of the cost oriented decisions of the Hungarian component users for the provision of the reliability of their products.

Cebe, L.:

**Two- and Multidimensional Fourier's Series and Fourier's Integral**

HÍRADÁSTECHNIKA (Budapest) 1990. No. 9-10.

First part of this article deals with the two- and multidimensional variants of sinusoidal functions. On the basis of it the Fourier's series of two- and multidimensional, periodic functions are discussed, then the Fourier's integral of two- and multidimensional aperiodic functions is introduced. This less known part of mathematics has basic importance in the wave theory and in several, other areas of physics.

In the second part of this article the multidimensional Dirac pulse and the multi-dimensional sampling function are introduced briefly. They have special importance in the digital picture processing spreading increasingly.

## HÍRADÁSTECHNIKA

A szerkesztésért felelős: Dr. Tófalvi Gyula. Szerkesztőségünk címe: Budapest V., Kossuth Lajos tér 6-8. 1055. Telefon: 153-1027. Kiadja a DELTA Szaklapkiadó és Műszaki Szolgáltató Leányvállalat. 1093. Budapest, Szamuely u. 44. Felelős kiadó: F. Nádor Mara igazgató. Terjeszti a Magyar Posta Vállalat. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Hírlapelőfizetési és Lapellátási irodánál (HELIR, Budapest, József Nádor tér 1. 1900) közvetlenül, vagy postautalványon, valamint átutalással a HELIR 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámra. Előfizetési díj: fél évre 180 Ft, egész évre 360 Ft. Egyes szám ára 30 Ft. Megjelenik havonta. A folyóirat külföldre előfizethető: a „KULTÚRA” Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest, postafiók 149. és a Magyar Média, 1392 Budapest, Pf. 279.86 - 253.

HU ISSN 0018 - 2028

index: 25 375

**Ára: 60Ft**

ADDITIONAL INFORMATION  
The following information  
is provided for your  
reference. It is not  
intended to constitute  
an offer or a solicitation  
of any kind. It is  
provided for informational  
purposes only.